1857

LA

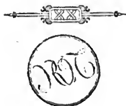
TEORICA DEI DETERMINANTI

E

LE SUE PRINCIPALI APPLICAZIONI

DEL D.r FRANCESCO BRIOSCHI

PROF. ORD. DI MATEMATICA APPLICATA NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PAVIA.



PAVIA

TIPOGRAFIA DEGLI EREDI BIZZONI

1854.

PREFAZIONE

For what is the theory of determinants? It is an algebra upon algebra; a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations, in the same way as algebra itself enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic.

SYLVESTER. *Phil. Mag.* 1851.

Le ricerche di Cramer e di Bezout (1) intorno la risoluzione delle equazioni algebriche lineari e sulla eliminazione, segnano l'origine della teorica di quelle funzioni, le quali, indicate dapprima col nome di *risultanti*, vengono ora generalmente chiamate *determinanti*. La legge di formazione dei determinanti è dovuta a questi geometri, i quali la dedussero per analogia considerando la forma dei risultati ottenuti dall'operare sopra due e tre equazioni ad altrettante incognite. Questa legge forma anche lo scopo principale dei lavori di Laplace e di Vandermonde (2) sulla eliminazione, nei quali, come corollarj di essa, sono dimostrate, e la proprietà dei determinanti di mutare di segno o di annullarsi quando si permutano o si suppongono identici alcuni elementi, e l'altra proprietà per cui un determinante di un ordine qualunque può risultare dalla somma di prodotti di determinanti di ordine inferiore. (§. 3.°). Nelle memorie di Lagrange (3) relative al problema della rotazione di un corpo solido ed alle piramidi triangolari, viene fatto uso di determinanti del terzo ordine, e si trovano enunciate rispetto a questi determinanti alcune proprietà, che in seguito vennero estese ai determinanti di un ordine qualsivoglia. Queste proprietà ponno ridursi alle seguenti: 1.ª il quadrato

(1) Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Appendice — 1750 — Histoire de l'Académie Royale des Sciences. 1764.

(2) Histoire de l'Académie Royale des Sciences. 1772. Seconde Partie.

(3) Nouveaux mémoires de l'Académie Royale de Berlin. 1773.

di un determinante è esso medesimo un determinante; 2.° il determinante ad *elementi reciproci* di un determinante del terzo ordine è eguale al quadrato di quest'ultimo determinante. (§§. 5.° e 6.°). Gauss (1), nelle sue ricerche intorno le forme binarie e ternarie ha generalizzata la prima di queste proprietà dimostrando, pei determinanti del secondo e terzo ordine, che il prodotto di due determinanti è esso medesimo un determinante. Nella classica opera di questo autore trovasi per la prima volta introdotta nella scienza la parola determinante. I teoremi di Lagrange e di Gauss vennero estesi da Binet (2) alla somma di prodotti di un numero qualsivoglia di determinanti del secondo, terzo, e quarto ordine ma la generalizzazione di quei teoremi ai determinanti di ordine qualunque è dovuta a Cauchy (3). Le prime due sezioni della seconda parte dell' importante memoria di quest' autore » *Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquerir etc.* » contengono la regola generale per la moltiplicazione dei determinanti, e le principali proprietà dei determinanti ad elementi reciproci; nelle altre due sezioni si trovano dimostrati i più importanti teoremi sui determinanti *minori*, e sui determinanti dei determinanti medesimi, chiamati dal medesimo geometra determinanti *derivati*. Alla memoria di Cauchy tennero dietro varj lavori di applicazione (4) dei teoremi conosciuti fino a quell' epoca, e solo nel 1841 l' illustre Jacobi (5) nella memoria — *De formatione et proprietatibus determinantium* — pose le basi di un trattato intorno la teorica dei determinanti. A questa fa seguito la memoria del medesimo autore — *De determinantibus functionalibus* — nella quale giovandosi del calcolo differenziale, e di alcune note proprietà sulla composizione delle funzioni, aggiungeva una importantissima parte a quella teorica. (§. 10.°). Anche le prime ricerche intorno ai determinanti *gobbi* (§. 8.°) si devono a Jacobi (6), esse vennero completate ed estese da Cayley (7) in due interessanti memorie. I più recenti lavori sui determinanti sono applicazioni delle loro proprietà all'analisi, alla geome-

---

(1) Recherches Arilmétiques. 1807.
(2) Journal de l'École Polytechnique. Cahier seizième. 1813.
(3) Journal de l'École Polytechnique — Cahier dix-septième. 1815.
(4) Crelle. Journal für die Mathematik. — Band. 12. — Liouville. Journal de Mathématiques. T.° 2. etc.
(5) Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 22.
(6) Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 2. Ueber die Pfaffsche Integrations-Methode.
(7) Crelle. Journal für die Mathematik. Bände 32. u. 38.

tria, alla meccanica, alla teorica delle equazioni, alla teorica dei numeri ecc., dovute a Jacobi, Cayley, Sylvester, Cauchy, Hesse, Hermite, Borchardt, Salmon, Malmstéen, Joachimsthal ecc. (1).

La varietà ed importanza delle applicazioni della teorica dei determinanti, fanno sentire agli studiosi il desiderio ed il bisogno di libri nei quali possano trovare esposti i principj di questo ramo d' analisi. Le memorie di Jacobi, ed il pregiato opuscolo di Spottiswoode (2) — *Elementary theorems relating to determinants* — sono le sole opere alle quali può ricorrere chi si incammina in oggi allo studio di quella teorica. Non stimiamo quindi inopportuna la pubblicazione di un nuovo libro sull' argomento.

Marzo 1854.

(1) Jacobi — Mathematische Werke — Cauchy. Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique. Salmon. On the higher plane curves. — Journal de Crelle — Journal de Liouville — Philosophical Magazine — The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. — Annali di Tortolini.

(2) London. George Bell — 1851.

INDICE





Errata

Pag. 3.ª lin. penultima in luogo di $= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} -$ ecc. leggi $= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} -$ ecc.

» 9.ª lin. 15.ª in luogo di indicate dalla (5) leggi « indicate dalla (6) »

» 16.ª lin. 11.ª in luogo di contatto delle prime rette leggi « di contatto della prima retta »

» 20.ª lin. 6.ª gli esponenti 2, 3 devono essere permutati.

» 30.ª lin. 16.ª in luogo di $P \frac{dP}{da_{r,s_1}} =$ ecc. leggi « $Q \frac{dP}{da_{r,s_2}} =$ ecc. »

» » lin. 18.ª in luogo di $\begin{vmatrix} a_{n,s_1} & a_{n,s} \\ c_{\nu,s_1} & c_{\nu,s} \end{vmatrix}$ leggi « $\begin{vmatrix} a_{u,s_1} & a_{u,s} \\ c_{\nu,s_1} & c_{\nu,s} \end{vmatrix}$ »

LA TEORICA DEI DETERMINANTI

E LE SUE PRINCIPALI APPLICAZIONI



§. 1.° Definizioni e Notazioni.

Il simbolo $a_{r,s}$ rappresenti in generale una quantità la quale cambia di valore al variare degli indici r, s; e suppongasi che gli indici medesimi possano assumere i valori $1, 2, 3 \ldots n$.

Chiamasi *determinante* la espressione che risulta dall'aggregato degli $1.2.3\ldots n$ prodotti i quali si ottengono permutando gli indici in tutti i modi possibili nel prodotto:

$$a_{r_1,s_1}\, a_{r_2,s_2} \ldots a_{r_n,s_n}$$

ed applicando ai prodotti medesimi segni determinati.

Le quantità $a_{r,s}$ chiamansi gli *elementi* del determinante; gli elementi $a_{r,s}$ ed $a_{s,r}$ si dicono *conjugati*, e gli elementi $a_{1,1}\; a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ diconsi *principali*.

La notazione pei determinanti generalmente adottata e di cui fecero uso Laplace, Cauchy, Jacobi, è la scrittura simbolica della definizione cioè:

$$\Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

Questa notazione ha sulle altre il vantaggio della brevità, ma allorquando si debbano eseguire operazioni speciali sugli elementi del determinante, oppure alcuni di essi elementi assumano valori particolari converrà far uso del seguente metodo di notazione:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

nel quale appajono espliciti tutti gli elementi.

Gli elementi situati l' uno sotto l' altro si diranno in una medesima colonna, e quelli posti d'accanto l'un l'altro si diranno in una medesima linea. È evidente, per la definizione, che considerando un elemento qualunque $a_{r,s}$, in ciascuno dei prodotti in cui entra l'elemento medesimo non potrà trovarsi alcuno degli elementi situati nella stessa colonna o nella stessa linea di esso.

Un terzo modo di notazione dovuto al Sig. Sylvester, il quale ha qualche analogia col metodo già adottato da Vandermonde, consiste nell'esprimere le quantità $a_{r,s}$ con due lettere a_r, α_s le quali prese separatamente non rappresentano nè quantità, nè simboli di operazione ma solo *ombre* di quantità. Coll' introduzione di questi elementi ideali l' autore rappresenta il determinante sotto una forma più compatta dell' ultima esposta scrivendo l'una sotto l' altra le due serie di elementi nel modo che segue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

ed il valore algebrico di questo determinante verrà espresso dalla:

$$\Sigma \pm a_1 \alpha_{r_1} \cdot a_2 \alpha_{r_2} \dots a_n \alpha_{r_n}$$

osservando che le quantità $r_1, r_2 \dots r_n$ sono differenti fra loro e possono assumere tutti i valori $1, 2 \dots n$.

L' ordine di un determinante si desume dal numero dei suoi elementi principali, quindi il determinante superiore sarà dell' ennesimo ordine.

§. 2.° Legge di formazione dei determinanti.

La legge di formazione dei determinanti consiste nella legge dei segni che devonsi attribuire ai varj prodotti dall' aggregato dei quali risultano i determinanti stessi. Questa legge, la quale è l' ordinaria allorquando si tratta di permutazioni, attribuisce a ciascuno di quei prodotti segno positivo o negativo, secondo che è dispari o pari il numero dei primi indici permutati nel prodotto:

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

per ottenere il prodotto che si considera, supposto positivo il prodotto superiore. Così per esempio si avrà:

$$\Sigma(\pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}) = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3}$$
$$- a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}$$

Osservando il secondo membro di questa eguaglianza risulta facilmente essere :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{2,1}(a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,2}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3})$$

od anche :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

la quale relazione mostra in qual modo si possa giungere al valore algebrico di un determinante simbolizzato col secondo dei metodi indicati al §. 1.° Per la legge dei segni dichiarata più sopra è chiaro come analogamente al risultato superiore si debba avere in generale :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots - (-1)^n a_{n,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

e come nello sviluppo di un determinante dell' ennesimo ordine un elemento qualunque $a_{r,s}$ sarà moltiplicato per il determinante dell' $(n-1)$esimo ordine il quale si ottiene trascurando gli elementi dell' r esima linea e della s esima colonna del determinante dato, ed attribuendo a quel prodotto segno positivo o negativo secondo che i numeri r ed s sono ambedue pari o ambedue dispari, oppure l'uno pari e l'altro dispari.

Esempj. 1.°

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1$$

espressione pel doppio dell' area di un triangolo avente i vertici degli angoli nei punti di coordinate $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$.

2.° Se supponiamo:

$$x_1=a_1+a_2 \quad x_2=b_1+b_2 \quad x_3=c_1+c_2$$

$$y_1=a_1a_2 \quad y_2=b_1b_2 \quad y_3=c_1c_2$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1+a_2 & a_1a_2 \\ 1 & b_1+b_2 & b_1b_2 \\ 1 & c_1+c_2 & c_1c_2 \end{vmatrix} = (a_1-b_2)(b_1-c_2)(c_1-a_2)+(a_2-b_1)(b_2-c_1)(c_2-a_1)$$

ed allorquando le $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ rappresentino le distanze che sei punti situati sopra una medesima retta hanno da un punto qualunque di essa, la espressione superiore eguagliata a zero indica essere i sei punti in involuzione.

3.°

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \text{ecc.}$$

Se le $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 \ldots$ rappresentano le coordinate di quattro punti, il determinante superiore rappresenta il volume della piramide avente i vertici degli angoli in quei quattro punti.

§. 3.° Proprietà generali ai determinanti.

Dalla legge di formazione di un determinante risulta che il valore ed il segno del medesimo non si alterano, se le linee e le colonne di esso diventeranno ordinatamente colonne e linee. Cioè sussisterà identicamente la equazione:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Così è evidente che scambiandosi fra loro due linee o due colonne di un determinante, cambiano i segni dei termini del valore algebrico del medesimo, giac-

chè in ciascuno di essi avviene permutazione nei primi indici di due elementi, ma ne rimane costante il valore, per il che si avrà:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,r} \dots a_{1,s} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} \dots a_{2,r} \dots a_{2,s} \dots a_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,r} \dots a_{n,s} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,s} \dots a_{1,r} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} \dots a_{2,s} \dots a_{2,r} \dots a_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,s} \dots a_{n,r} \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Se quindi gli indici r, s fossero eguali fra loro si avrebbe:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,r} \dots a_{1,r} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} \dots a_{2,r} \dots a_{2,r} \dots a_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1} \dots a_{n,r} \dots a_{n,r} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

cioè se due linee o due colonne di un determinante diventano identiche il determinante è nullo. Ed il determinante sarà anche eguale a zero quando gli elementi di una linea o di una colonna del medesimo sieno nulli.

Se gli elementi di una linea o di una colonna di un determinante contengono un fattore comune, esso comparirà in ciascuno dei prodotti componenti il valore algebrico, e quindi si potrà raccogliere come fattore comune a tutti quei termini; per cui si avrà:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{1,1} & a_{1,2} \dots a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & a_{2,2} \dots a_{2,n} \\ \dots & \dots\dots \\ \alpha a_{n,1} & a_{n,2} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots a_{2,n} \\ \dots & \dots\dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Analogamente si potranno moltiplicare gli elementi di una linea o di una colonna per un medesimo fattore, purchè questo si ponga a divisore del determinante.

Se gli elementi di una linea o di una colonna di un determinante risulteranno dalla somma di due o più quantità; esso sarà eguale alla somma di tanti determinanti quante sono quelle quantità; e si avrà per esempio:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha_1 & a_{1,2} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1}+\alpha_2 & a_{2,2} \dots a_{2,n} \\ \dots & \dots\dots \\ a_{n,1}+\alpha_n & a_{n,2} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots a_{2,n} \\ \dots & \dots\dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{1,2} \dots a_{1,n} \\ \alpha_2 & a_{2,2} \dots a_{2,n} \\ \dots & \dots\dots \\ \alpha_n & a_{n,2} \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Osserviamo che se le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ fossero ordinatamente eguali agli elementi di un' altra colonna o ne differissero di un fattore costante il secondo determinante del secondo membro sarebbe nullo.

Esempj. 1.°

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & xyz^2 & xy^2z \\ y & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ z & xy^2z & x^2yz & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} .$$

Se x, y, z rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo questo determinante rappresenta 16 volte il quadrato dell' area del medesimo.

2.° È evidente la identità dei due determinanti :

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

Se supponiamo essere s_0, $s_1 \ldots$ le somme delle potenze zero, prima ... delle radici dell' equazione :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

il determinante superiore eguagliato a zero è la condizione perchè questa equazione abbia due radici eguali. Infatti quel determinante per l'osservazione superiore si può scrivere :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & s_0 & s_1 + as_0 & s_2 + as_1 + bs_0 \\ s_0 & s_1 + as_0 & s_2 + as_1 + bs_0 & s_3 + as_2 + bs_1 + cs_0 \\ s_1 & s_2 + as_1 & s_3 + as_2 + bs_1 & s_4 + as_3 + bs_2 + cs_1 \end{vmatrix}$$

e quindi per le note relazioni fra i coefficienti e le somme delle potenze delle radici di una equazione si avrà :

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 3 & 2a & b \\ 3 & 2a & b & 0 \\ a & 2b & 3c & 0 \end{vmatrix} = .$$

$$a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$$

la quale espressione eguagliata a zero dà appunto la suddetta condizione.

Considerando la equazione (1) o la più generale:

$$\mathrm{P} = a_{1,s}\,\alpha_{1,s} + a_{2,s}\,\alpha_{2,s} + \ldots\ldots + a_{n,s}\,\alpha_{n,s}$$

nella quale P rappresenta il determinante primo membro della medesima (1), e si è posto per brevità:

$$(2)\qquad \alpha_{r,s} = \pm \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \ldots & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \ldots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \ldots & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

le $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ . . . risultano evidentemente indipendenti dagli elementi $a_{1,s}$, $a_{2,s}$ . . . ; per cui si avranno le equazioni:

$$\alpha_{1,s} = \frac{d\mathrm{P}}{da_{1,s}}\,,\quad \alpha_{2,s} = \frac{d\mathrm{P}}{da_{2,s}}\quad \ldots\ldots\quad \alpha_{n,s} = \frac{d\mathrm{P}}{da_{n,s}}$$

e quindi:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathrm{P} &= a_{1,s}\frac{d\mathrm{P}}{da_{1,s}} + a_{2,s}\frac{d\mathrm{P}}{da_{2,s}} + \ldots\ldots + a_{n,s}\frac{d\mathrm{P}}{da_{n,s}} \\ &= a_{r,1}\frac{d\mathrm{P}}{da_{r,1}} + a_{r,2}\frac{d\mathrm{P}}{da_{r,2}} + \ldots\ldots + a_{r,n}\frac{d\mathrm{P}}{da_{r,n}} \end{aligned}$$

Supponendo r, s disuguali fra loro, la espressione:

$$a_{1,r}\frac{d\mathrm{P}}{da_{1,s}} + a_{2,r}\frac{d\mathrm{P}}{da_{2,s}} + \ldots\ldots + a_{n,r}\frac{d\mathrm{P}}{da_{n,s}}$$

rappresenterà il determinante P allorquando si suppongano in esso sostituiti agli elementi $a_{1,s}$, $a_{2,s}$ . . . , ordinamente gli elementi $a_{1,r}$, $a_{2,r}$ . . . Ma siccome questi

due ultimi elementi costituiscono una colonna del determinante P; quella espressione rappresenterà un determinante a due colonne composte di elementi identici, e quindi sarà eguale a zero. Cioè si avranno le:

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
&a_{1,r}\frac{dP}{da_{1,s}} + a_{2,r}\frac{dP}{da_{2,s}} + \dots + a_{n,r}\frac{dP}{da_{n,s}} = 0 \\
&a_{r,1}\frac{dP}{da_{s,1}} + a_{r,2}\frac{dP}{da_{s,2}} + \dots + a_{r,n}\frac{dP}{da_{s,n}} = 0
\end{aligned}
$$

La espressione $\frac{dP}{da_{r,s}}$ non contiene l'elemento $a_{r,s}$ nè alcuno degli elementi che appartengono alla medesima linea od alla medesima colonna di esso nel determinante P; ossia non contiene alcuno degli elementi che costituiscono la r esima linea e la $s$esima colonna di quel determinante. Ne segue che avranno luogo le equazioni:

$$
(5) \qquad \frac{d^2P}{da^2_{r,s}} = 0 \qquad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r,s_1}} = 0 \qquad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s}} = 0
$$

Il determinante $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ dell'$(n-2)$ ordine si ottiene dal determinante P trascurando due linee e due colonne di quest'ultimo; cioè le linee $r$esima ed $r_1$esima; e le colonne $s$esima ed $s_1$esima. Ora se nel determinante P si scambiano fra loro le due colonne $s$esima ed $s_1$esima il determinante stesso cambia di segno ed il determinante $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ diventa $-\frac{d^2P}{da_{r,s_1}\,da_{r_1,s}}$; quindi si avrà in generale:

$$
(6) \qquad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}} = -\frac{d^2P}{da_{r,s_1}\,da_{r_1,s}}
$$

Le espressioni $\frac{dP}{da_{r,1}}$, $\frac{dP}{da_{r,2}}$ . . . considerate come determinanti dell'$(n-1)$esimo ordine danno luogo alle seguenti equazioni analoghe alle (3):

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\frac{dP}{da_{r,1}} &= a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,2}} + \dots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,n}} \\
\frac{dP}{da_{r,2}} &= a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,2}} + \dots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,n}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dP}{da_{r,n}} &= a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s,2}} + \dots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s,n}}
\end{aligned}
$$

nelle qnali supponiamo r, ed s differenti fra loro. Sostituendo qnesti valori nella seconda delle (3), ed osservando che per le (5), (6) si hanno le:

$$\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,1}} = 0 \quad \frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,2}} = 0 \ \ldots \ \frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s,n}} = 0$$

$$\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,2}} = -\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,1}}, \quad \frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,3}} = -\frac{d^2P}{da_{r,3}da_{s,1}} \text{ ecc.}$$

si ottiene la:

$$P = \begin{vmatrix} a_{r,1} & a_{s,1} \\ a_{r,2} & a_{s,2} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,2}} + \begin{vmatrix} a_{r,1} & a_{s,1} \\ a_{r,3} & a_{s,3} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,3}} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{r,n-1} & a_{s,n-1} \\ a_{r,n} & a_{s,n} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,n-1}da_{s,n}}$$

ossia:

$$(8) \qquad P = \Sigma_u \Sigma_\nu \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{s,u} \\ a_{r,\nu} & a_{s,\nu} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,u}da_{s,\nu}}$$

nella quale le u, ν si intendano assumere tutti i valori $1, 2, 3 \ldots, n$.

Affatto analogamente, se si moltiplicano le equazioni (7) per $a_{s_1,1} a_{s_1,2} \ldots a_{s_1,n}$ snpponendo s_1, r differenti fra loro, e si sommano i risultati si ha:

$$(9) \qquad 0 = \Sigma_u \Sigma_\nu \begin{vmatrix} a_{s_1,u} & a_{s,u} \\ a_{s_1,\nu} & a_{s,\nu} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,u}da_{s,\nu}}$$

Se nella equazione:

$$(10) \qquad \frac{dP}{da_{r,s}} = a_{s_1,1}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{s_1,1}} + a_{s_1,2}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{s_1,2}} + \ldots + a_{s_1,n}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{s_1,n}}$$

operiamo le permntazioni di indici indicate dalla (5) otteniamo la:

$$(11) \qquad -\frac{dP}{da_{r,s}} = a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s_1,s}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s_1,s}} + \ldots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s_1,s}}$$

Notiamo anche la seguente equazione analoga alle (4), e facilmente dimostrabile:

$$(12) \qquad a_{s_1,1}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{r_1,1}} + a_{s_1,2}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{r_1,2}} + \ldots + a_{s_1,n}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{r_1,n}} = 0$$

ritenute le r_1, s_1 differenti fra loro.

La equazione (8) dimostra come il determinante P dell' ennesimo ordine possa risoltare dalla somma di prodotti di determinanti del secondo ordine per determinanti dell' $(n-2)$ ordine; nello stesso modo potrebbesi dimostrare che il determinante P si può ottenere dalla somma di prodotti di determinanti del terzo, quarto ecc. ordine, per determinanti del $(n-3)$ esimo, $(n-4)$ esimo ecc. ordine; e si concepisce facilmente come in generale, sopponendo che i simboli $r_1, r_2 \ldots r_m$ rappresentino numeri interi tali che:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$$

e ponendo per brevità:

$$\mathrm{P}_{r_1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,r_1} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{2,r_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r_1,1} & a_{r_1,2} & \ldots & a_{r_1,r_1} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{P}_{r_2} = \begin{vmatrix} a_{1,r_1+1} & a_{1,r_1+2} & \ldots & a_{1,r_2} \\ a_{2,r_1+1} & a_{2,r_1+2} & \ldots & a_{2,r_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r_2,r_1+1} & a_{r_2,r_1+2} & \ldots & a_{r_2,r_2} \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

si avrà:

$$(13) \qquad \mathrm{P} = \Sigma \pm \mathrm{P}_{r_1} \mathrm{P}_{r_2} \ldots \mathrm{P}_{r_m}$$

nella quale il simbolo Σ denota l' aggregato di prodotti analoghi all' esposto, i quali prodotti risultano di fattori che sono i determinanti formati da totti i gruppi di r_1 colonne nelle r_1 prime linee, da tutti i gruppi di r_2 colonne nelle r_2 linee prossime alle prime r_1 e così di seguito; osservando che nessuna colonna e quindi nessuna linea deve essere impiegata doe volte in un medesimo prodotto. Il numero di questi prodotti sarà evidentemente:

$$\frac{1\,2\,3\ldots n}{1.2.3\ldots r_1.1.2.3\ldots r_2\ldots 1\,2\,3\ldots r_m}$$

Dalle formole (3) (4) ottiensi facilmente il seguente gruppo di equazioni:

$$a_{1,1}\frac{d\mathrm{P}}{da_{1,s_1}} + a_{2,1}\frac{d\mathrm{P}}{da_{2,s_1}} + \ldots + a_{n,1}\frac{d\mathrm{P}}{da_{n,s_1}} = 0$$

$$a_{1,2}\frac{d\mathrm{P}}{da_{1,s_1}} + a_{2,2}\frac{d\mathrm{P}}{da_{2,s_1}} + \ldots + a_{n,2}\frac{d\mathrm{P}}{da_{n,s_1}} = 0$$

. . . .

$$a_{1,s_1}\frac{dP}{da_{1,s_1}}+a_{2,s_1}\frac{dP}{da_{2,s_1}}+\ldots+a_{n,s_1}\frac{dP}{da_{n,s_1}}=P$$

. . . .

$$a_{1,n}\frac{dP}{da_{1,s_1}}+a_{2,n}\frac{dP}{da_{2,s_1}}+\ldots+a_{n,n}\frac{dP}{da_{n,s_1}}=0$$

Si moltiplichino queste equazioni ordinatamente per :

$$\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,1}}\,,\quad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,2}}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,n}}$$

e si sommino i risultati, osservando alle equazioni (7), (11), (12); si giunge alla:

$$(14)\qquad \frac{dP}{da_{r,s}}\,\frac{dP}{da_{r_1,s_1}}-\frac{dP}{da_{r_1,s}}\,\frac{dP}{da_{r,s_1}}=P\,\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$$

la quale appartiene ad una classe di formole di cui si tratterà al §. 6.°

Applicazione.

Da ti sei punti in nn piano determinare il luogo geometrico di un settimo punto pel quale abbia luogo la proprietà, che condotte da esso le sei rette ai punti dati, il fascio che ne risulta sia in involuzione.

Sieno x, y le coordinate dell' nltimo pnnto nominato; $x_1, y_1 \ldots x_6, y_6$ quelle degli altri punti. Immaginando le sei rette segate da una retta, che supporremo l' asse della x; ed indicando con a_1, $a_2 \ldots a_6$ le distanze dei punti di intersezione dall' origine, l' involuzione del fascio verrà rappresentata dall' equazione :

$$(15)\qquad (a_1-a_4)(a_3-a_6)(a_5-a_2)+(a_2-a_3)(a_4-a_5)(a_6-a_1)=0$$

Ora si hanno facilmente le :

$$a_1=\frac{xy_1-x_1y}{y_1-y}\,,\quad a_2=\frac{xy_2-x_2y}{y_2-y}\,,\ \text{ecc.}$$

quindi :

$$a_1-a_4=\frac{(xy_1-x_1y)(y_4-y)-(xy_4-x_4y)(y_1-y)}{(y_1-y)(y_4-y)}$$

la quale espressione per la formola (14) riducesi alla :

$$a_3 - a_4 = \frac{y}{(y_1 - y)(y_2 - y)} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Sostitnendo questi valori nell' equazione (15) si ha quale equazione del luogo geometrico richiesto la :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_6 & y_6 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_5 & y_5 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_6 & y_6 \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione rappresenta evidentemente una linea del terzo ordine, e siccome essa equazione viene soddisfatta ponendo $x = x_1, x_2 \dots$ $y = y_1, y_2 \dots$, la linea passerà per i sei punti dati.

§. 4.° Della risoluzione delle equazioni algebriche lineari.

Le formole trovate al §. 3.° sono di molto uso nella risoluzione delle equazioni algebriche lineari. Considerando il sistema di equazioni :

$$(16) \qquad \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= u_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= u_n \end{aligned}$$

si otterrà il valore di una qualunque delle incognite $x_1, x_2 \dots x_n$; per esempio della x_s, moltiplicando le equazioni medesime ordinatamente per $\frac{dP}{da_{1,s}}, \frac{dP}{da_{2,s}} \dots \frac{dP}{da_{n,s}}$ e sommando le equazioni risultanti. Infatti in questa somma tutti i coefficienti delle incognite meno quello della x_s saranno eguali a zero essendo questi coefficienti espressioni analoghe al primo membro della prima delle (4), ed il coefficiente della x_s sarà eguale a P per la prima delle (3); quindi si avrà :

$$Px_s = u_1\alpha_{1,s} + u_2\alpha_{2,s} + \dots + u_n\alpha_{n,s};$$

nella quale il simbolo $\alpha_{r,s}$ rappresenta il determinante (2). In questo modo si otterrà il gruppo di equazioni:

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
Px_1 &= u_1\alpha_{1,1} + u_2\alpha_{2,1} + \ldots + u_n\alpha_{n,1}\\
Px_2 &= u_1\alpha_{1,2} + u_2\alpha_{2,2} + \ldots + u_n\alpha_{n,2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Px_n &= u_1\alpha_{1,n} + u_2\alpha_{2,n} + \ldots + u_n\alpha_{n,n}
\end{aligned}
$$

le quali danno i richiesti valori delle incognite. È da notarsi che il determinante P è denominatore comune a tutti questi valori, la quale proprietà avvertita la prima volta da Cramer può dirsi essere stata l' origine delle ricerche dei geometri in questa parte d' analisi.

Analogamente considerando il sistema di equazioni:

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
a_{1,1}z_1 + a_{2,1}z_2 + \ldots + a_{n,1}z_n &= v_1\\
a_{1,2}z_1 + a_{2,2}z_2 + \ldots + a_{n,2}z_n &= v_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{1,n}z_1 + a_{2,n}z_2 + \ldots + a_{n,n}z_n &= v_n
\end{aligned}
$$

(il qual sistema viene denominato da alcuni autori *sistema derivato* del (16)), si avranno le:

$$
\begin{aligned}
Pz_1 &= v_1\alpha_{1,1} + v_2\alpha_{1,2} + \ldots + v_n\alpha_{1,n}\\
Pz_2 &= v_1\alpha_{2,1} + v_2\alpha_{2,2} + \ldots + v_n\alpha_{2,n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Pz_n &= v_1\alpha_{n,1} + v_2\alpha_{n,2} + \ldots + v_n\alpha_{n,n}
\end{aligned}
$$

È importante l' osservare che le incognite dei due sistemi (16) (18), sono legate da una equazione la quale si ottiene moltiplicando queste ultime equazioni ordinatamente per $u_1, u_2 \ldots u_n$ e sommando i risultati avendo riguardo alle (17); oppure moltiplicando le (17) ordinatamente per $v_1, v_2 \ldots v_n$ e sommando i risultati osservando a queste ultime. Nell' uno o nell' altro modo si arriva alla:

$$
(19)\qquad u_1z_1 + u_2z_2 + \ldots + u_nz_n = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_nx_n
$$

Le equazioni (17) sussistono qualunque siano le $u_1, u_2, \ldots u_n$, se quindi queste quantità saranno tutte eguali a zero, e non lo possano essere le $x_1, x_2 \ldots x_n$ dovrà essere:

$$
P = 0
$$

per cui questa equazione è il risultato dell'eliminazione delle incognite x_1, $x_2 \dots x_n$ dal gruppo di equazioni:

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = 0
\end{aligned}
$$

come anche è il risultato dell'eliminazione delle incognite z_1, $z_2 \dots z_n$ dal gruppo (18) allorquando si suppongano $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$.

Se supponiamo:

$$u_1 = -a_{1,0}x_0, \quad u_2 = -a_{2,0}x_0 \; \dots \; u_n = -a_{n,0}x_0$$

le equazioni (17) danno le seguenti:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}x_1 &= -x_0(a_{1,0}\alpha_{1,1} + a_{2,0}\alpha_{2,1} + \dots + a_{n,0}\alpha_{n,1}) \\
\mathrm{P}x_2 &= -x_0(a_{1,0}\alpha_{1,2} + a_{2,0}\alpha_{2,2} + \dots + a_{n,0}\alpha_{n,2}) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathrm{P}x_n &= -x_0(a_{1,0}\alpha_{1,n} + a_{2,0}\alpha_{2,n} + \dots + a_{n,0}\alpha_{n,n})
\end{aligned}
$$

dalle quali:

$$
(21) \qquad x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n =
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
: \pm
\begin{vmatrix}
a_{1,0} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,0} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n,0} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
: \dots : \pm
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,0} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,0} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,0}
\end{vmatrix}
$$

Queste proporzioni danno i valori dei rapporti fra le $n+1$ incognite componenti le n equazioni:

$$
(22) \qquad
\begin{aligned}
&a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\
&a_{2,0}x_0 + a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{n,0}x_0 + a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n = 0
\end{aligned}
$$

Applicazioni. 1.ª

Indicando con $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ le coordinate di un punto qualunque di un piano, l'equazione di una conica situata in quel piano sarà :

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2eyz + 2fxz + 2hxy = 0$$

Affinchè la retta rappresentata dall' equazione :

$$lx + my + nz = 0$$

sia tangente a quella conica, debbono essere soddisfatte le equazioni :

$$\begin{aligned} ax_1 + hy_1 + fz_1 - \tfrac{1}{2}\, l &= 0 \\ hx_1 + by_1 + ez_1 - \tfrac{1}{2}\, m &= 0 \\ fx_1 + ey_1 + cz_1 - \tfrac{1}{2}\, n &= 0 \\ lx_1 + my_1 + nz_1 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

nelle quali x_1, y_1, z_1 sono le coordinate del punto di contatto. Quindi la condizione a verificarsi perchè quella retta sia tangente la conica sarà :

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} a & h & f & l \\ h & b & e & m \\ f & e & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Immaginando una seconda retta :

$$l_1x + m_1y + n_1z = 0$$

la condizione perchè essa pure sia tangente alla conica sarà :

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} a & h & f & l_1 \\ h & b & e & m_1 \\ f & e & c & n_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Per trovare le coordinate dei punti di contatto osserviamo che posto :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f & l & l_1 \\ h & b & e & m & m_1 \\ f & e & c & n & n_1 \\ l & m & n & o & o \\ l_1 & m_1 & n_1 & n & o \end{vmatrix}$$

ed avendo riguardo alle (23), (24) si hanno le equazioni seguenti:

$$l\,\frac{d\Delta}{dl_1} + m\,\frac{d\Delta}{dm_1} + n\,\frac{d\Delta}{dn_1} = o$$

$$a\,\frac{d\Delta}{dl_1} + h\,\frac{d\Delta}{dm_1} + f\,\frac{d\Delta}{dn_1} + l\mathrm{H} = o$$

$$h\,\frac{d\Delta}{dl_1} + b\,\frac{d\Delta}{dm_1} + e\,\frac{d\Delta}{dn_1} + m\mathrm{H} = o$$

$$f\,\frac{d\Delta}{dl_1} + e\,\frac{d\Delta}{dm_1} + c\,\frac{d\Delta}{dn_1} + n\mathrm{H} = o$$

nelle quali le espressioni $\frac{d\Delta}{dl_1}$, $\frac{d\Delta}{dm_1}$, $\frac{d\Delta}{dn_1}$ sono le derivate del determinante Δ rispetto agli elementi l_1, m_1, n_1 che costituiscono l' ultima linea, od a quelli che costituiscono l' ultima colonna ed:

$$\mathrm{H} = \pm \begin{vmatrix} a & h & f & l \\ h & b & c & m \\ f & e & c & n \\ l_1 & m_1 & n_1 & o \end{vmatrix}$$

Quindi le coordinate del punto di contatto delle prime rette colla conica verranno date dai rapporti:

$$x_1 : y_1 : z_1 = \frac{d\Delta}{dl_1} : \frac{d\Delta}{dm_1} : \frac{d\Delta}{dn_1}$$

ed analogamente per le coordinate del punto di contatto della seconda retta colla conica si avranno le:

$$x_2 : y_2 : z_2 = \frac{d\Delta}{dl} : \frac{d\Delta}{dm} : \frac{d\Delta}{dn}$$

Rammentando che:

$$\frac{d\Delta}{dm}\,\frac{d\Delta}{dn_1} - \frac{d\Delta}{dm_1}\,\frac{d\Delta}{dn} = \Delta\,\frac{d^2\Delta}{dm\,dn_1}$$

$$\frac{d\Delta}{dn}\frac{d\Delta}{dl_1}-\frac{d\Delta}{dn_1}\frac{d\Delta}{dl}=\Delta\frac{d^2\Delta}{dn\,dl_1}$$

$$\frac{d\Delta}{dl}\frac{d\Delta}{dm_1}-\frac{d\Delta}{dl_1}\frac{d\Delta}{dm}=\Delta\frac{d^2\Delta}{dl\,dm_1}$$

la equazione della retta corda di contatto sarà:

$$\frac{d^2\Delta}{dm\,dn_1}x+\frac{d^2\Delta}{dn\,dl_1}y+\frac{d^2\Delta}{dl\,dm_1}z=0$$

ossia indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto d' incontro delle due rette tangenti:

$$(25)\qquad (ax_0+hy_0+fz_0)x+(hx_0+by_0+ez_0)y+(fx_0+ey_0+cz_0)z=0$$

od anche:

$$x_0\frac{d\varphi}{dx}+y_0\frac{d\varphi}{dy}+z_0\frac{d\varphi}{dz}=0$$

La retta rappresentata da questa equazione chiamasi la *polare* del punto di coordinate x_0, y_0, z_0 il quale si chiama *polo*.

Immaginando due altre rette rappresentate dalle equazioni:

$$(26)\qquad \begin{aligned}\lambda x+\mu y+\nu z&=0\\ \lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z&=0\end{aligned}$$

e supposte queste rette tangenti alla conica, l' equazione della polare del punto comune intersezione di quelle rette sarà:

$$\begin{vmatrix} a & h & f\\ \lambda & \mu & \nu\\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} h & b & e\\ \lambda & \mu & \nu\\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} f & e & c\\ \lambda & \mu & \nu\\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\end{vmatrix}z=0$$

Si indichino con X, Y, Z le coordinate del punto d' incontro delle due polari; e con x_1, y_1, z_1 le coordinate della comune intersezione delle rette (26); ponendo per brevità:

$$bc-e^2=A\,,\quad ac-f^2=B\quad ab-h^2=C$$
$$ef-hc=H\,,\quad he-bf=F\quad hf-ae=E$$

si avranno le:

$$A(y_0z_1-y_1z_0)+H(x_1z_0-x_0z_1)+F(x_0y_1-x_1y_0)=kX$$
$$H(y_0z_1-y_1z_0)+B(x_1z_0-x_0z_1)+E(x_0y_1-x_1y_0)=kY$$
$$F(y_0z_1-y_1z_0)+E(x_1z_0-x_0z_1)+C(x_0y_1-x_1y_0)=kZ$$

essendo k una quantità indeterminata. Da queste equazioni ponendo :

$$R = \begin{vmatrix} A & H & F \\ H & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix}$$

si ottengono le seguenti :

$$y_0 z_1 - y_1 z_0 = \frac{k}{R}\left\{X(BC-E^2)+Y(EF-HC)+Z(HE-BF)\right\}$$

$$x_1 z_0 - x_0 z_1 = \frac{k}{R}\left\{X(EF-HC)+Y(AC-F^2)+Z(HF-AE)\right\}$$

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = \frac{k}{R}\left\{X(HE-BF)+Y(HF-AE)+Z(AB-H^2)\right\}$$

Si osservi che indicando con S il determinante :

$$\begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & e \\ f & e & c \end{vmatrix}$$

si hanno le :

$$BC-E^2=aS\,, \quad AC-F^2=bS\,, \quad AB-H^2=cS$$

$$EF-HC=hS \quad HE-BF=fS \quad HF-AE=eS$$

$$R=S^2 \quad (*)$$

quindi sarà :

$$y_0 z_1 - y_1 z_0 = \frac{k}{S}(aX+hY+fZ)$$

$$z_0 x_1 - z_1 x_0 = \frac{k}{S}(hX+bY+eZ)$$

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = \frac{k}{S}(fX+eY+cZ)$$

Ora l' equazione della retta che passa pei due poli, ossia pei punti di coordinate x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1 è la :

$$(y_0 z_1 - y_1 z_0)x + (z_0 x_1 - z_1 x_0)y + (x_0 y_1 - x_1 y_0)z = 0$$

quindi sostituendo i valori trovati si avrà per equazione di questa retta :

$$(aX+hY+fZ)x + (hX+bY+eZ)y + (fX+eY+cZ)z = 0$$

(*) Queste relazioni verranno dimostrate in generale al §. 6.°

La retta rappresentata da questa equazione chiamasi la polare del punto di coordinate X, Y, Z; ed i due sistemi composti, l' uno del punto di coordinate x_1, y_1, z_1 e di quest' ultima retta sulla quale esso è situato, e l'altro del punto di coordinate X, Y, Z e della retta (25) sulla quale quest'ultimo punto è situato, si dicono *polari reciproci* l' uno dell' altro.

2.° Chiamasi *discriminante* di una funzione omogenea a due variabili il primo membro dell' equazione risultante dall' eliminazione delle variabili dalle equazioni che si ottengono eguagliando a zero le derivate parziali di primo ordine di quella funzione rispetto a ciascuna delle variabili. Sia:

$$ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

la funzione omogenea della quale si cerca il discriminante. Eguagliando a zero le derivate prime parziali di essa rispetto ad x ed y si hanno le:

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$$
$$bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3 = 0$$

Per eliminare le variabili x, y da queste equazioni faremo uso di un metodo dovuto al Sig. Sylvester, e dal medesimo autore denominato metodo *dialitico* (*). Considerando le sei equazioni le quali si ottengono moltiplicando ciascuna delle superiori per x^2, xy, y^2, è manifesto che ritenendo le sei quantità x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 come le incognite ad eliminarsi si hanno sei equazioni analoghe alle (20), per cui il risultato dell'eliminazione si ottiene eguagliando a zero il determinante dei coefficienti. Per rendere evidente questa dichiarazione scriviamo quelle sei equazioni nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} ax^5 + 3bx^4y + 3cx^3y^2 + dx^2y^3 + \;.\; + \;.\; = 0 \\ \;.\; + ax^4y + 3bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + dxy^4 + \;.\; = 0 \\ \;.\; + \;.\; + ax^3y^2 + 3bx^2y^3 + 3cxy^4 + dy^5 = 0 \\ bx^5 + 3cx^4y + 3dx^3y^2 + ex^2y^3 + \;.\; + \;.\; = 0 \\ \;.\; + bx^4y + 3cx^3y^2 + 3dx^2y^3 + exy^4 + \;.\; = 0 \\ \;.\; + \;.\; + bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + 3dxy^4 + ey^5 = 0 \end{array}$$

(*) Philosophical Magazine. June 1841.

ed il risultato dell' eliminazione sarà :

$$\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & o & o \\ o & a & 3b & 3c & d & o \\ o & o & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & o & o \\ o & b & 3c & 3d & e & o \\ o & o & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix} = o$$

Il primo membro di questa equazione è il discriminante della funzione omogenea del quarto grado a due variabili. Il valore algebrico di questo discriminante venne dai Sig.ri Boole e Cayley posto sotto la semplicissima forma :

$$(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace-ad^2-eb^2-c^3+2bdc)^2$$

Dalle cose esposte risulta come in generale il discriminante di una funzione omogenea a due variabili del grado n, sia nna funzione omogenea dei coefficienti del grado $2(n-1)$.

3.° Rappresenti u una funzione omogenea dell' erresimo grado delle n variabili x_1, $x_2 \dots x_n$. Ponendo per brevità :

$$u_r = \frac{du}{dx_r} \qquad u_{r,s} = \frac{d^2u}{dx_r\, dx_s}$$

pel noto teorema di Eulero si avranno le equazioni :

$$\begin{array}{l} x_1u_{1,1}+x_2u_{1,2}+\dots\dots+x_nu_{1,n}-(r-1)u_1=o \\ x_2u_{2,1}+x_2u_{2,2}+\dots\dots+x_nu_{2,n}-(r-1)u_2=o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1u_{n,1}+x_2u_{n,2}+\dots\dots+x_nu_{n,n}-(r-1)u_n=o \\ x_1u_1+x_2u_2+\dots\dots+x_nu_n-ru \qquad =o \end{array}$$

La eliminazione delle x_1, $x_2 \dots x_n$ da queste $(n+1)$ equazioni fornisce la :

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} & u_1 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & \frac{r}{r-1}u \end{vmatrix} = o$$

dalla quale:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} & u_1 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & o \end{vmatrix} \pm \frac{r}{r-1} u \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} \end{vmatrix} = o$$

Ne risulta che per quei valori delle variabili $x_1, x_2 \dots x_n$ pei quali è nullo il valore della funzione u sarà eguale a zero il valore del determinante:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} & u_1 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & o \end{vmatrix}$$

Se supponiamo $n=2$ sarebbe nullo, per quei valori di x_1, x_2 che soddisfano la equazione $u(x_1, x_2)=o$, il trinomio:

$$u_{1,1} u_2^2 - 2u_{1,2} u_1 u_2 + u_{2,2} u_1^2$$

o geometricamente se quella equazione si supponesse rappresentare una linea, sarebbe in ogni punto di essa infinito il raggio di curvatura cioè la equazione $u(x_1, x_2)=o$ rappresenterebbe un fascio di rette.

Così la equazione $u(x_1, x_2, x_3)=o$ rappresenta un cono.

§. 5.° Moltiplicazione ed elevazione a potenza dei determinanti.

Considerando due sistemi di equazioni della forma:

$$\begin{gathered} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = u_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n = u_n \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} c_{1,1} y_1 + c_{2,1} y_2 + \dots + c_{n,1} y_n = x_1 \\ c_{1,2} y_1 + c_{2,2} y_2 + \dots + c_{n,2} y_n = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{1,n} y_1 + c_{2,n} y_2 + \dots + c_{n,n} y_n = x_n \end{gathered}$$

Se dai medesimi si vogliono ricavare i valori di $y_1, y_2 \dots y_n$ in funzione delle $a_{1,1}, a_{1,2} \cdots ; c_{1,1}, c_{1,2} \dots ; u_1, u_2 \dots u_n$ si ponno seguire due differenti vie. O si possono sostituire nel primo gruppo i valori di $x_1, x_2 \dots x_n$ dati dal secondo gruppo, e risolvere le equazioni risultanti; oppure si ponno ricavare dal primo gruppo i valori di $x_1, x_2 \dots x_n$, e sostituirli nel secondo risolvere le equazioni che ne emergono. I valori che in ambedue questi metodi si ottengono per le $y_1, y_2 \dots y_n$ dovranno essere identici; e nell' equazione che risulta dall' eguagliare i denominatori di quei valori trovasi scritta la regola per la moltiplicazione dei determinanti.

Pongasi nel primo sistema in luogo di $x_1, x_2 \dots x_n$ i valori dati dal secondo, e facendo per brevità :

$$
(27) \quad
\begin{array}{l}
a_{1,1}c_{1,1} + a_{1,2}c_{1,2} + \dots + a_{1,n}c_{1,n} = h_{1,1} \\
a_{1,1}c_{2,1} + a_{1,2}c_{2,2} + \dots + a_{1,n}c_{2,n} = h_{1,2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{1,1}c_{n,1} + a_{1,2}c_{n,2} + \dots + a_{1,n}c_{n,n} = h_{1,n} \\
\\
a_{2,1}c_{1,1} + a_{2,2}c_{1,2} + \dots + a_{2,n}c_{1,n} = h_{2,1} \\
a_{2,1}c_{2,1} + a_{2,2}c_{2,2} + \dots + a_{2,n}c_{2,n} = h_{2,2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{2,1}c_{n,1} + a_{2,2}c_{n,2} + \dots + a_{2,n}c_{n,n} = h_{2,n} \\
\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\\
a_{n,1}c_{1,1} + a_{n,2}c_{1,2} + \dots + a_{n,n}c_{1,n} = h_{n,1} \\
a_{n,1}c_{2,1} + a_{n,2}c_{2,2} + \dots + a_{n,n}c_{2,n} = h_{n,2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n,1}c_{n,1} + a_{n,2}c_{n,2} + \dots + a_{n,n}c_{n,n} = h_{n,n}
\end{array}
$$

si otterrà il gruppo di equazioni :

$$
\begin{array}{l}
h_{1,1}y_1 + h_{1,2}y_2 + \dots + h_{1,n}y_n = u_1 \\
h_{2,1}y_1 + h_{2,2}y_2 + \dots + h_{2,n}y_n = u_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
h_{n,1}y_1 + h_{n,2}y_2 + \dots + h_{n,n}y_n = u_n
\end{array}
$$

e se da esso si ricaveranno i valori delle $y_1, y_2 \dots y_n$, questi valori avranno per denominatore comune il determinante :

$$(28) \qquad R = \pm \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix}$$

Se all' incontro dal primo sistema si ricavano i valori di $x_1, x_2 \dots x_n$ il denominatore comune ad essi sarà:

$$P = \pm \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

per cui se questi valori sostituiscansi nel secondo sistema, e dalle equazioni risultanti si ricavano i valori delle $y_1, y_2 \dots y_n$, il denominatore comune a questi ultimi valori consterà del prodotto del determinante superiore pel determinante:

$$(29) \qquad Q = \pm \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

e quindi dal confronto di quei valori si avrà:

$$(30) \qquad R = P \, . \, Q$$

la quale è la formola richiesta pel prodotto dei determinanti. Osservando alle equazioni (27) è manifesto come gli elementi costituenti una medesima linea del determinante prodotto risultino dalle somme dei prodotti degli elementi di una linea del determinante P per gli elementi delle varie linee del fattore Q. È evidente che il determinante prodotto si potrà ottenere anche eseguendo, quelle moltiplicazioni degli elementi dei determinanti fattori, per colonne, o per linee e colonne; in questi casi la forma del determinante prodotto non sarà più quella dell' R; ma i valori algebrici di quei determinanti saranno identici.

Così per esempio il prodotto dei determinanti binarj:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} ; \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

si potrà esprimere nelle quattro differenti maniere che seguono:

$$\begin{vmatrix} a\alpha+b\beta & a\gamma+b\delta \\ c\alpha+d\beta & c\gamma+d\delta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a\alpha+c\gamma & a\beta+c\delta \\ b\alpha+d\gamma & b\beta+d\delta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a\alpha+c\beta & a\gamma+c\delta \\ b\alpha+d\beta & b\gamma+d\delta \end{vmatrix}$$

Se gli elementi del determinante P saranno ordinatamente identici agli elementi del determinante Q l' equazione (30) darà:

$$R = P^2$$

e gli elementi del determinante R verranno forniti dalle equazioni:

$$a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + \ldots + a_{r,n}^2 = h_{r,r}$$

$$a_{r,1}a_{s,1} + a_{r,2}a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}a_{s,n} = h_{r,s}$$

nelle quali le r, s ponno assumere i valori 1, 2, ... n.

È importante l' osservare che nel determinante, quadrato di un determinante qualunque, gli elementi conjugati sono identici fra loro.

Applicazioni. 1.ª

La equazione del terzo grado la quale incontrasi in Geometria allorquando vogliansi determinare gli assi principali di una superficie del secondo ordine, in Meccanica nella ricerca degli assi dei momenti d' inerzia principali di un corpo, delle forze principali d' elasticità o degli assi dell' elissoide d' elasticità ecc. può scriversi sotto la forma di determinante nel modo seguente:

$$f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & b-\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le radici di questa equazione sono reali. Questa proposizione già dimostrata da Cauchy, da Kummer, da Borchardt, da Jacobi lo venne recentemente dal Signor Sylvester (*) con molta semplicità ed eleganza fondandosi sulla regola per la moltiplicazione dei determinanti.

(*) Philosophical Magazine. 1852

Moltiplicando il primo membro di questa equazione pel determinante $f(\lambda)$ si ha il determinante :

$$\begin{vmatrix} A-\lambda^2 & F & E \\ F & B-\lambda^2 & D \\ E & D & C-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

essendosi posto per brevità :

$$a^2+\beta^2+\gamma^2=A \qquad \alpha\beta+\gamma(a+b)=F$$

$$b^2+\alpha^2+\gamma^2=B \qquad \alpha\gamma+\beta(a+c)=E$$

$$c^2+\alpha^2+\beta^2=C \qquad \beta\gamma+\alpha(b+c)=D$$

quindi avremo :

$$-f(\lambda).f(-\lambda)=\lambda^6-L\lambda^4+M\lambda^2-N$$

Osserviamo che i coefficienti L , M , N sono positivi giacchè si ha facilmente :

$$L=a^2+b^2+c^2+2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2$$

$$M=(ab-\gamma^2)^2+(ac-\beta^2)^2+(bc-\alpha^2)^2+2(a\alpha-\beta\gamma)^2+2(b\beta-\alpha\gamma)^2+2(c\gamma-\alpha\beta)^2$$

$$N=\begin{vmatrix} a & \gamma & \beta \\ \gamma & b & \alpha \\ \beta & \alpha & c \end{vmatrix}^2$$

Pongasi :

$$a=a_1+p\,,\qquad b=b_1+p\,,\qquad c=c_1+p\,,\qquad \lambda=\lambda_1+p$$

la espressione $f(-\lambda)$ diventa :

$$\varphi(-\lambda_1)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda_1 & \gamma & \beta \\ \gamma & b_1-\lambda_1 & \alpha \\ \beta & \alpha & c_1-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

e la equazione $\varphi(-\lambda_1).\varphi(\lambda_1)=o$ sarà della forma :

$$\lambda_1^6-L_1\lambda_1^4+M_1\lambda_1^2-N_1=o$$

nella quale i coefficienti L_1 , M_1 , N_1 sono positivi. Quindi per la regola di Cartesio nessuno dei valori di λ_1^2 potrà essere negativo, cioè non potrà essere $(\lambda-p)^2$ eguale a $-q^2$, e quindi non può essere $\lambda=p+q\sqrt{-1}$. Ne deriva che le radici dell' equazione $f(-\lambda)=o$ sono esenzialmente reali.

Osserviamo che questa dimostrazione, come quelle dovute ai Sig.[ri] Jacobi e Borchardt, si estende all' equazione della medesima forma dell' ennesimo grado; il che vedremo in seguito.

2.ª Sieno α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 i coseni degli angoli che tre rette condotte da un medesimo punto formano con tre assi ortogonali; ed ω_1, ω_2, ω_3 gli angoli che quelle rette comprendono fra loro. Si avranno le note relazioni:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1 \qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=\cos\omega_3$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 \qquad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=\cos\omega_2$$
$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 \qquad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=\cos\omega_1$$

e quindi:

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_3 & \cos\omega_2 \\ \cos\omega_3 & 1 & \cos\omega_1 \\ \cos\omega_2 & \cos\omega_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ora è noto che indicando con a, b, c i coseni degli angoli che la perpendicolare al piano determinato da due rette p. e. la seconda e la terza fa cogli assi ortogonali si hanno le:

$$a=\pm\frac{\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2}{\operatorname{sen}\omega_1}, \quad b=\pm\frac{\alpha_3\gamma_2-\alpha_2\gamma_3}{\operatorname{sen}\omega_1}, \quad c=\pm\frac{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}{\operatorname{sen}\omega_1}$$

e che:

$$a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1=\operatorname{sen}\omega_2 . \operatorname{sen}\theta_3=\operatorname{sen}\omega_3 . \operatorname{sen}\theta_2$$

essendo θ_1, θ_2, θ_3 gli angoli diedri compresi dai piani di cui le comuni intersezioni sono le rette prima, seconda e terza. Sostituendo questi valori nell' equazione (31) si avrà:

$$\operatorname{sen}\omega_1.\operatorname{sen}\omega_2.\operatorname{sen}\theta_3=\operatorname{sen}\omega_1.\operatorname{sen}\omega_3.\operatorname{sen}\theta_2=\pm\sqrt{(1-\cos^2\omega_1-\cos^2\omega_2-\cos^2\omega_3+2\cos\omega_1\cos\omega_2\cos\omega_3)}$$

3.ª Mediante la moltiplicazione dei determinanti si ponno ottenere alcune trasformazioni di determinanti, le quali sono utili in molte ricerche. Daremo due esempj di simili trasformazioni.

Se il determinante P viene moltiplicato pel determinante:

$$S=\begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & -a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & -a_{3,1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1,1} \end{vmatrix}$$

e supponiamo le indeterminate α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ soddisfare le n equazioni :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 a_{2,1} + \ldots + \alpha_n a_{n,1} = 1 \\ \alpha_1 a_{1,2} + \alpha_2 a_{2,2} + \ldots + \alpha_n a_{n,2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 a_{1,n} + \alpha_2 a_{2,n} + \ldots + \alpha_n a_{n,n} = 0 \end{array}$$

il determinante prodotto sarà :

$$I = \begin{vmatrix} a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2} & a_{1,3}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,3} & \ldots & a_{1,n}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,n} \\ a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,2} & a_{2,3}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,3} & \ldots & a_{2,n}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,2}a_{n,1} - a_{n-1,1}a_{n,2} & a_{n-1,3}a_{n,1} - a_{n-1,1}a_{n,3} & \ldots & a_{n-1,n}a_{n,1} - a_{n-1,1}a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ora osservando che :

$$S = (-1)^{n-1} a_{2,1}\, a_{3,1} \ldots a_{n-1,1}$$

si avrà :

$$I = (-1)^{n-1} a_{2,1} \cdot a_{3,1} \ldots a_{n-1,1} P$$

L' utilità di questa formola venne già provata dal Sig. Hermite (*) in una ricerca nella teorica dei numeri.

Come un caso particolare di essa si ha la equazione :

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_2}{a} & \frac{y_1 - y_2}{b} \\ \frac{x_2 - x_3}{a} & \frac{y_2 - y_3}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ 1 & \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \\ 1 & \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix}$$

il secondo membro della quale, supponendo che le x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 rappresentino coordinate di punti situati sull' elisse di cui i semiassi sono a, b; è eguale a $\pm \frac{2A}{ab}$, essendo A l' area del triangolo avente i vertici degli angoli in quei tre punti. Ora se con λ, μ, ν si indicano le lunghezze dei lati del triangolo, e con l, m, n i semidiametri dell' elisse rispettivamente paralleli a quei lati, quadrando l' equazione superiore si ha :

(*) Journal de Liouville. T.° 14.

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda^2}{l^2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\lambda^2}{l^2}-\frac{\nu^2}{n^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\lambda^2}{l^2}-\frac{\nu^2}{n^2}\right) & \frac{\nu^2}{n^2} \end{vmatrix} = \frac{4A^2}{a^2b^2}$$

dalla quale :

$$A = \frac{ab}{4}\sqrt{\left\{\left(\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l}-\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right)\left(-\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\right\}}$$

Quale secondo esempio di trasformazione di determinanti dimostreremo un teorema enunciato dal Sig. Sylvester (*) e del quale il medesimo autore fece varie applicazioni geometriche.

Teorema. Il valore del determinante :

$$(32) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

è eguale a quello del determinante :

$$H = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} & 1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

nel quale :

$$A_{r,s} = a_{r,s} + h_r + k_s$$

essendo h_1, $h_2 \dots$; k_1, $k_2 \dots$ due serie di quantità affatto arbitrarie.

Infatti si moltiplichi il determinante (32) pel seguente :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1$$

(*) Philosophical Magazine. 1852.

ed eseguendo la moltiplicazione per linee si ha:

$$\pm \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}+k_1 & a_{1,2}+k_2 & \dots & 1 \\ a_{2,1}+k_1 & a_{2,2}+k_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}+k_1 & a_{n,2}+k_2 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Si moltiplichi questo risultato pel determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n & 1 \end{vmatrix} = \pm 1$$

eseguendo il prodotto per colonne si avrà:

$$\Delta = H$$

come si doveva dimostrare.

La equazione:

$$PQ = R$$

derivata ordinatamente rispetto ad $a_{r,1}\ a_{r,2} \dots a_{r,n}$, avendo riguardo alle (27) dà origine alle equazioni seguenti:

$$Q\frac{dP}{da_{r,1}} = \frac{dR}{dh_{r,1}} c_{1,1} + \frac{dR}{dh_{r,2}} c_{2,1} + \dots + \frac{dR}{dh_{r,n}} c_{n,1}$$

$$Q\frac{dP}{da_{r,2}} = \frac{dR}{dh_{r,1}} c_{1,2} + \frac{dR}{dh_{r,2}} c_{2,2} + \dots + \frac{dR}{dh_{r,n}} c_{n,2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q\frac{dP}{da_{r,n}} = \frac{dR}{dh_{r,1}} c_{1,n} + \frac{dR}{dh_{r,2}} c_{2,n} + \dots + \frac{dR}{dh_{r,n}} c_{n,n}$$

Si moltiplichino queste equazioni per $\frac{dQ}{dc_{s,1}}, \frac{dQ}{dc_{s,2}}, \dots \frac{dQ}{dc_{s,n}}$, e sommando i risultati si ha:

$$(33)\qquad \frac{dP}{da_{r,1}}\frac{dQ}{dc_{s,1}} + \frac{dP}{da_{r,2}}\frac{dQ}{dc_{s,2}} + \dots + \frac{dP}{da_{r,n}}\frac{dQ}{dc_{s,n}} = \frac{dR}{dh_{r,s}}$$

essendo la espressione:

$$c_{r,s}\frac{dQ}{dc_{s,1}}+c_{r,2}\frac{dQ}{dc_{s,2}}+\ldots+c_{r,n}\frac{dQ}{dc_{s,n}},$$

per quanto si è dimostrato al §. 3.°, eguale a zero od a Q secondo che i simboli r, s hanno valori differenti od uguali.

Se gli elementi del determinante P sono rispettivamente identici a quelli del determinante Q, la formola (33) dà:

$$(34)\qquad \frac{dP}{da_{r,1}}\frac{dP}{da_{s,1}}+\frac{dP}{da_{r,2}}\frac{dP}{da_{s,2}}+\ldots+\frac{dP}{da_{r,n}}\frac{dP}{da_{s,n}}=\frac{dR}{dh_{r,s}}$$

dalla quale supponendo $r=s$ si ha:

$$(35)\qquad \left(\frac{dP}{da_{r,1}}\right)^2+\left(\frac{dP}{da_{r,2}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dP}{da_{r,n}}\right)^2=\frac{dR}{dh_{r,r}}$$

Esempio:

$$(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)^2+(\gamma_2\alpha_1-\gamma_1\alpha_2)^2+(\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2)^2=(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2$$

È evidente che mediante la derivazione si ponno ottenere altre relazioni fra i determinanti P, Q, R; fra queste notiamo le due seguenti. Si derivi la equazione:

$$(36)\qquad Q\frac{dP}{da_{r,s}}=\frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,s}+\frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,s}+\ldots+\frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,s}$$

rispetto a c_{r_1,s_1}; e la equazione:

$$P\frac{dP}{da_{r,s_1}}=\frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,s_1}+\frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,s_1}+\ldots+\frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,s_1}$$

si derivi rispetto a $c_{r_1,s}$; sottraendo i risultati si ha:

$$(37)\qquad \frac{dP}{da_{r,s}}\frac{dQ}{dc_{r_1,s_1}}-\frac{dP}{da_{r,s_1}}\frac{dQ}{dc_{r_1,s}}=\Sigma_u\,\Sigma_v\begin{vmatrix}a_{u,s_1} & a_{u,s}\\ c_{v,s_1} & c_{v,s}\end{vmatrix}\frac{d^2R}{dh_{r,v}\,dh_{u,r_1}}$$

nella quale le u, v si intendono assumere tutti i valori $1, 2, \ldots n$.

Derivando la (36) rispetto ad a_{r_1,s_1}, e rammentando le equazioni (5) (6) si ha:

$$(38) \qquad Q\,\frac{d^2 P}{da_{r,s}\, da_{r_1,s_1}} = \Sigma_u\, \Sigma_v \begin{vmatrix} c_{u,s_1} & c_{u,s} \\ c_{v,s_1} & c_{v,s} \end{vmatrix} \frac{d^2 R}{dh_{r,v}\, dh_{r_1,u}}$$

Se supponiamo che gli elementi del determinante P sieno rispettivamente identici a quelli del determinante Q si ha $h_{u,r_1} = h_{r_1,u}$, e quindi dal confronto delle due equazioni (37), (38) si ha la (14) trovata al §. 3.°

Consideriamo i seguenti due sistemi di equazioni:

$$\begin{aligned}
c_{1,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{1,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots + c_{1,n}\frac{dP}{da_{r,n}} &= H_{r,1}\\
c_{2,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{2,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots + c_{2,n}\frac{dP}{da_{r,n}} &= H_{r,2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{n,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{n,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots + c_{n,n}\frac{dP}{da_{r,n}} &= H_{r,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{1,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{1,n}} &= K_{r,1}\\
a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{2,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{2,n}} &= K_{r,2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{n,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{n,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,n}} &= K_{r,n}
\end{aligned}$$

Moltiplicando le equazioni del primo sistema ordinatamente per $\frac{dQ}{dc_{1,1}}, \frac{dQ}{dc_{2,1}} \ldots \frac{dQ}{dc_{n,1}}$ e sommando i risultati si ha:

$$Q\,\frac{dP}{da_{r,1}} = H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,1}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,1}} + \ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,1}}$$

ed analogamente:

$$\begin{aligned}
Q\,\frac{dP}{da_{r,2}} &= H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,2}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,2}} + \ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,2}}\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Q\,\frac{dP}{da_{r,n}} &= H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,n}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,n}} + \ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,n}}
\end{aligned}$$

Queste ultime equazioni moltiplicate ordinatamente per $a_{r,1}$, $a_{r,2}$ . . . $a_{r,n}$ e sommate avendo riguardo al secondo sistema danno la :

$$(39) \qquad PQ = H_{r,1} K_{r,1} + H_{r,2} K_{r,2} + \ldots + H_{r,n} K_{r,n}$$

e moltiplicate per $a_{s,1}$ $a_{s,2}$ . . . $a_{s,n}$ e sommate danno la :

$$o = H_{r,1} K_{s,1} + H_{r,2} K_{s,2} + \ldots + H_{r,n} K_{s,n}$$

Le $H_{r,1}$, $H_{r,2}$ . . . $K_{s,1}$, $K_{s,2}$ . . . sono evidentemente determinanti dell'ennesimo ordine.

Applicazioni.

1.° Si immagini un tetraedro riferito a tre assi ortogonali aventi l' origine nel centro di gravità di una delle faccie. Si chiamino a, b, c le aree delle altre tre faccie; α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 i coseni degli angoli che le perpendicolari condotte dall' origine ai piani di queste faccie formano coi semiassi delle coordinate positive; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 le coordinate dei centri di gravità delle faccie medesime; v il volume del tetraedro.

Per un noto teorema dovuto al Sig. Cauchy si hanno le nove equazioni :

$$(40) \quad \begin{matrix} a\alpha_1 x_1 + b\alpha_2 x_2 + c\alpha_3 x_3 = v & a\alpha_1 y_1 + b\alpha_2 y_2 + c\alpha_3 y_3 = o & a\alpha_1 z_1 + b\alpha_2 z_2 + c\alpha_3 z_3 = o \\ a\beta_1 x_1 + b\beta_2 x_2 + c\beta_3 x_3 = o & a\beta_1 y_1 + b\beta_2 y_2 + c\beta_3 y_3 = v & a\beta_1 z_1 + b\beta_2 z_2 + c\beta_3 z_3 = o \\ a\gamma_1 x_1 + b\gamma_2 x_2 + c\gamma_3 x_3 = o & a\gamma_1 y_1 + b\gamma_2 y_2 + c\gamma_3 y_3 = o & a\gamma_1 z_1 + b\gamma_2 z_2 + c\gamma_3 z_3 = v \end{matrix}$$

Ponendo :

$$P = \begin{vmatrix} a\alpha_1 & b\alpha_2 & c\alpha_3 \\ a\beta_1 & b\beta_2 & c\beta_3 \\ a\gamma_1 & b\gamma_2 & c\gamma_3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

si ha :

$$PQ = v^3$$

Ora per una formola conosciuta si ha :

$$P = \frac{9}{2} v^2$$

e se con u si indica il volume del tetraedro avente i vertici degli angoli triedri nei centri di gravità delle faccie del tetraedro dato si ha:

$$Q = 6u$$

per cui sarà:

$$v = 27u$$

Dalle equazioni (39) si hanno le:

$$ax_1 = \frac{dR}{d\alpha_1}\frac{v}{R}, \quad ay_1 = \frac{dR}{d\beta_1}\frac{v}{R}, \quad az_1 = \frac{dR}{d\gamma_1}\frac{v}{R} \text{ ecc.}$$

posto $R = \frac{P}{abc}$; quindi:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{v^2}{a^2R^2}\left\{\left(\frac{dR}{d\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\gamma_1}\right)^2\right\}$$

e da questa:

$$l = \frac{2}{9}\frac{bc}{v}\operatorname{sen}\omega$$

indicando l la lunghezza di uno degli spigoli del secondo tetraedro, ed ω l' angôlo diedro compreso dalle faccie di area b, c. Ma se con λ si indica la lunghezza dello spigolo opposto a quello comune intersezione di queste faccie si ha:

$$v = \frac{2}{3}\frac{bc}{\lambda}\operatorname{sen}\omega$$

dunque:

$$l = \frac{1}{3}\lambda.$$

2.° Posto:

$$P = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

si hanno le:

$$PQ = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

Se le $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ si suppongono coordinate di un punto A, le $\frac{x_2}{z_2}$, $\frac{y_2}{z_2}$; $\frac{x_3}{z_3}$, $\frac{y_3}{z_3}$ di due punti B, C, e così le $\frac{a_1}{c_1}$, $\frac{b_1}{c_1}$ ... di altri tre punti a, b, c le equazioni superiori equivalgono alle proprietà geometriche:

$$ABC \,.\, abc = ACa \,.\, Bbc + ACb \,.\, Bac + ACc \,.\, Bab$$

$$0 = ACa \,.\, Abc + ACb \,.\, Aac + ACc \,.\, Aab$$

essendo ABC, *abc* ecc. le aree dei triangoli ABC, *abc* ecc.

§. 6.° Determinanti ad elementi reciproci, o determinanti di determinanti.

Rappresentando con P il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

e posto per brevità $\alpha_{r,s} = \frac{dP}{da_{r,s}}$; chiamasi determinante ad *elementi reciproci* corrispondente al determinante P il seguente:

$$(41) \qquad S = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

È noto (§. 3.°) che fra gli elementi del determinante P, e quelli del determinante S hanno luogo le relazioni:

$$(42) \qquad \begin{aligned} a_{r,1}\alpha_{r,1} + a_{r,2}\alpha_{r,2} + \dots + a_{r,n}\alpha_{r,n} &= P \\ a_{r,1}\alpha_{s,1} + a_{r,2}\alpha_{s,2} + \dots + a_{r,n}\alpha_{s,n} &= 0 \end{aligned}$$

quindi moltiplicando fra loro i determinanti P, S si avrà:

$$P.S = \begin{vmatrix} P & o & \dots & o \\ o & P & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & \dots & P \end{vmatrix} = P^n$$

dalla quale:

$$(43) \qquad S = P^{n-1}$$

Se nella seconda delle equazioni (42) si pone $s = 1, 2 \dots n$; si ottengono n equazioni dalle quali si ponno ricavare i valori di $a_{r,1}, a_{r,2}, \dots a_{r,n}$. Trovasi facilmente essere:

$$a_{r,s} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dx_{r,s}} P$$

e quindi per la equazione (43):

$$(44) \qquad P^{n-2} a_{r,s} = \frac{dS}{dx_{r,s}}$$

Indicando con T, V i determinanti ad elementi reciproci corrispondenti ai determinanti Q, R (equazioni (28), (29)) si avranno le:

$$T = Q^{n-1} \qquad V = R^{n-1}$$

e quindi per l'equazione (30):

$$V = S.T$$

cioè il prodotto dei determinanti ad elementi reciproci corrispondenti a due determinanti P, Q è eguale al determinante ad elementi reciproci corrispondente al determinante R prodotto dei due P, Q.

Applicazione.

Si considerino le equazioni (20), e si indichino con $x_{r,1} : x_{r,2} : \dots : x_{r,n}$ i valori dei rapporti $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ che si ricavano da $n-1$ di quelle equazioni escludendo la $r$esima. Si avranno le:

$$x_{r,1} : x_{r,2} : \dots : x_{r,n} = \alpha_{r,1} : \alpha_{r,2} : \dots : \alpha_{r,n}$$

Sostituendo questi valori nel determinante :

$$A = \pm \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

si avrà :

$$A = \pm \lambda . P^{n-1}$$

essendo λ una indeterminata. Se supponiamo $x_{r,s} = 1$ si ha :

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha_{1,1} \alpha_{2,2} \dots \alpha_{n,n}$$

Mediante queste formole si ponno risolvere i due problemi : 1.° Trovare l'area di un triangolo essendo date le equazioni dei lati. 2.° Trovare il volume di un tetraedro essendo date le equazioni delle faccie.

Le equazioni (43), (44) e la (14) trovata al §. 3.° appartengono ad una serie di relazioni sussistenti fra determinanti di determinanti, le quali si deducono da due formole generali come ora veniamo a mostrare.

Consideriamo i due gruppi di equazioni (16), (17), e scriviamo $i+1$ qualsivogliano equazioni consecutive del primo di essi nel modo seguente :

$$a_{r,s} x_s + a_{r,s+1} x_{s+1} + \dots + a_{r,u} x_u = u_r - (a_{r,1} x_1 + \dots + a_{r,s-1} x_{s-1} + a_{r,u+1} x_{u+1} + \dots + a_{r,n} x_n)$$
$$a_{r+1,s} x_s + a_{r+1,s+1} x_{s+1} + \dots + a_{r+1,u} x_u = u_{r+1} - (a_{r+1,1} x_1 + \dots + a_{r+1,s-1} x_{s-1} + a_{r+1,u+1} x_{u+1} + \dots + a_{r+1,n} x_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{\nu,s} x_s + a_{\nu,s+1} x_{s+1} + \dots + a_{\nu,u} x_u = u_\nu - (a_{\nu,1} x_1 + \dots + a_{\nu,s-1} x_{s-1} + a_{\nu,u+1} x_{u+1} + \dots + a_{\nu,n} x_n)$$

essendo $u = s+i$, $\nu = r+i$.

Si indichi con $P_{\nu,m}$ il determinante :

$$\begin{vmatrix} a_{r,s} & a_{r,s+1} & \dots & a_{r,u-1} & a_{r,m} \\ a_{r+1,s} & a_{r+1,s+1} & \dots & a_{r+1,u-1} & a_{r+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu,r} & a_{\nu,s+1} & \dots & a_{\nu,u-1} & a_{\nu,m} \end{vmatrix}$$

e ricavando dalle equazioni superiori il valore di x_u si ha facilmente la equazione:

$$(45)\quad P_{\nu,1} x_1 + \dots + P_{\nu,s-1} x_{s-1} + P_{\nu,u} x_u + \dots + P_{\nu,n} x_n = u_r \frac{dP_{\nu,u}}{da_{r,u}} + u_{r+1} \frac{dP_{\nu,u}}{da_{r+1,u}} + \dots + u_\nu \frac{dP_{\nu,u}}{da_{\nu,u}}$$

Scriviamo ora $n-i$ equazioni scelte opportunamente fra quelle del gruppo (17) nel modo che segue :

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{1,1}u_1+\ldots+\alpha_{r-1,1}u_{r-1}+\alpha_{\nu,1}u_\nu+\ldots+\alpha_{n,1}u_n=\mathrm{P}x_1-(\alpha_{r,1}u_r+\ldots+\alpha_{\nu-1,1}u_{\nu-1})\\
&\alpha_{1,2}u_1+\ldots+\alpha_{r-1,2}u_{r-1}+\alpha_{\nu,2}u_\nu+\ldots+\alpha_{n,2}u_n=\mathrm{P}x_2-(\alpha_{r,2}u_r+\ldots+\alpha_{\nu-1,2}u_{\nu-1})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{1,s-1}u_1+\ldots+\alpha_{r-1,s-1}u_{r-1}+\alpha_{\nu,s-1}u_\nu+\ldots+\alpha_{n,s-1}u_n=\mathrm{P}x_{s-1}-(\alpha_{r,s-1}u_r+\ldots+\alpha_{\nu-1,s-1}u_{\nu-1})\\
&\alpha_{1,u}u_1+\ldots+\alpha_{r-1,u}u_{r-1}+\alpha_{\nu,u}u_\nu+\ldots+\alpha_{n,u}u_n=\mathrm{P}x_u-(\alpha_{r,u}u_r+\ldots+\alpha_{\nu-1,u}u_{\nu-1})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{1,n}u_1+\ldots+\alpha_{r-1,n}u_{r-1}+\alpha_{\nu,n}u_\nu+\ldots+\alpha_{n,n}u_n=\mathrm{P}x_n-(\alpha_{r,n}u_r+\ldots+\alpha_{\nu-1,n}u_{\nu-1})
\end{aligned}
$$

e ricavando da queste il valore di u_ν si ha :

$$
(46)\quad \mathrm{S}_{r,u}u_r+\mathrm{S}_{r+1,u}u_{r+1}+\ldots+\mathrm{S}_{\nu,u}u_\nu=\mathrm{P}\left(x_1\frac{d\mathrm{S}_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,1}}+\ldots+x_{s-1}\frac{d\mathrm{S}_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,s-1}}+x_u\frac{d\mathrm{S}_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,u}}+\ldots+x_n\frac{d\mathrm{S}_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,n}}\right)
$$

posto :

$$
\mathrm{S}_{m,u}=\begin{vmatrix}
\alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{r-1,1} & \alpha_{m,1} & \alpha_{\nu+1,1} & \ldots & \alpha_{n,1}\\
\alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{r-1,2} & \alpha_{m,2} & \alpha_{\nu+1,2} & \ldots & \alpha_{n,2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_{1,s-1} & \ldots & \alpha_{r-1,s-1} & \alpha_{m,s-1} & \alpha_{\nu+1,s-1} & \ldots & \alpha_{n,s-1}\\
\alpha_{1,u} & \ldots & \alpha_{r-1,u} & \alpha_{m,u} & \alpha_{\nu+1,u} & \ldots & \alpha_{n,u}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_{1,n} & \ldots & \alpha_{r-1,n} & \alpha_{m,n} & \alpha_{\nu+1,n} & \ldots & \alpha_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

Osserviamo che i valori di x_u ricavabili dalle equazioni (45) (46) devono evidentemente coincidere, giacchè mediante le equazioni (16) non si può esprimere che in una sola maniera il valore di x_u in funzione delle quantità $x_1, \ldots x_{s-1}$, $x_{u+1} \ldots x_n$; u_r, u_{r+1}, $\ldots u_\nu$ in numero n. Quindi eguagliando i coefficienti di u_{r+a} (essendo a un numero qualunque fra quelli della serie 0, 1 ... i) nei due suddetti valori di x_u si ottiene la equazione :

$$
\mathrm{P}\frac{d\mathrm{S}_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,u}}\;\frac{d\mathrm{P}_{\nu,u}}{d\alpha_{r+a,u}}=\mathrm{P}_{\nu,u}\;\mathrm{S}_{r+a,u}
$$

Da questa supponendo $a=i$ si ha :

$$
(47)\qquad \mathrm{P}\frac{d\mathrm{S}_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,u}}\;\frac{d\mathrm{P}_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,u}}=\mathrm{P}_{\nu,u}\;\mathrm{S}_{\nu,u}
$$

e siccome :

$$\frac{dS_{\nu,u}}{d\alpha_{\nu,u}} = S_{\nu+1,u+1} \qquad \frac{dP_{\nu,u}}{da_{\nu,u}} = P_{\nu-1,u-1}$$

si avrà :

$$P \,.\, S_{\nu+1,u+1}\, P_{\nu-1,u-1} = P_{\nu,u} \,.\, S_{\nu,u}$$

e quindi :

$$(48) \qquad P^c\, S_{\nu+c,u+c}\, P_{\nu-1,u-1} = P_{\nu+c-1,u+c-1}\, S_{\nu,u}$$

Se in questa formola facciamo $r = s = 1$ si ottiene quella data dai Sig.ri Jacobi e Spottiswoode.

È evidente che una seconda formola analoga alla (47) si potrà ottenere eseguendo la indicata operazione sopra $i+1$ equazioni consecutive qualsivogliano del gruppo (17), ed $n-i$ equazioni scelte opportunamente fra quelle del gruppo (16). Si arriverà così all' equazione :

$$(49) \qquad P\, \frac{dS_{u,\nu}}{d\alpha_{u,\nu}}\, \frac{dP_{u,\nu}}{da_{u,\nu}} = P_{u,\nu}\, S_{u,\nu}$$

nella quale :

$$S_{m,\nu} = \begin{vmatrix} \alpha_{s,r} & \dots & \alpha_{u-1,r} & \alpha_{m,r} \\ \alpha_{s,r+1} & \dots & \alpha_{u-1,r+1} & \alpha_{m,r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{s,\nu} & \dots & \alpha_{u-1,\nu} & \alpha_{m,\nu} \end{vmatrix}, \quad P_{u,m} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1,m} & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,1} & \dots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,m} & a_{s-1,\nu+1} & \dots & a_{s-1,n} \\ a_{u,1} & \dots & a_{u,r-1} & a_{u,m} & a_{u,\nu+1} & \dots & a_{u,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,m} & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ed osservando essere :

$$\frac{dS_{u,\nu}}{d\alpha_{u,\nu}} = S_{u-1,\nu-1} \qquad \frac{dP_{u,\nu}}{da_{u,\nu}} = P_{u+1,\nu+1}$$

si avrà :

$$(50) \qquad P^c.\, S_{u-1,\nu-1}\, P_{u+c,\nu+c} = P_{u,\nu}\, S_{u+c-1,\nu+c-1}$$

Se nella equazione (48) si pone $i = 0$, e quindi $\nu = r$, $u = s$; essendo :

$$P_{r-1,s-1} = 1 \qquad S_{r,s} = S$$

si ha :

$$P^c\, S_{r+c,s+c} = P_{r+c-1,s+c-1} \,.\, S$$

la quale comprende come caso particolare tanto la (43), che si ottiene ponendo $r = s = 1$, $c = n$; quanto la (44) la quale si ottiene ponendo $c = 1$.

Analogamente se nella equazione (50) ponesi $i=0$ osservando che:

(*) $S_{s-1,r-1}=1 \qquad P_{s,r}=P$

si ha:

$$P^{c-1}.P_{s+c,r+c}=S_{s+c-1,r+c-1}$$

dalla quale si ottiene la (14) ponendo $c=2$.

Applicazioni. 1.ª

Si indichi con:

(51) $$U=\Sigma_r a_{r,r} x_r^2+2\Sigma_r\Sigma_s a_{r,s} x_r x_s\,,$$

nella quale $a_{r,s}=a_{s,r}$, una funzione quadratica ad n variabili. Osserviamo che il determinante P è il discriminante della funzione U; cioè è il risultato della eliminazione delle x_1, $x_2 \dots x_n$ dalle equazioni:

$$\frac{dU}{dx_1}=0 \qquad \frac{dU}{dx_2}=0 \dots \qquad \frac{dU}{dx_n}=0$$

La funzione quadratica ad n variabili:

$$V=\Sigma_r \alpha_{r,r} z_r^2+2\Sigma_r\Sigma_s \alpha_{r,s} z_r z_s$$

nella quale $\alpha_{r,s}=\dfrac{dP}{da_{r,s}}$ chiamasi funzione reciproca della U. Vedesi facilmente che la funzione V può esprimersi sotto la forma di determinante nel seguente modo:

(52) $$V=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & z_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & 0 \end{vmatrix}$$

e la reciprocità fra le funzioni U e V rendesi evidente considerando che per l'equazione (44), la funzione U può porsi sotto la forma:

(*) La sussistenza delle equazioni $P_{r-1,r-1}=1$, $S_{s-1,r-1}=1$ ecc. provasi facilmente osservando le identità:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix}=\text{ecc.}$$

$$(53)\qquad U=\frac{1}{P^{n-2}}\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{1,n} & x_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

Supponiamo:

$$(54)\qquad \begin{aligned} z_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ z_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n \end{aligned}$$

in questo caso ha luogo la equazione:

$$(55)\qquad V=-P.U$$

Per dimostrare questa proprietà rammentiamo (pag. 6) che se agli elementi dell' ultima colonna del determinante V si aggiungono ordinatamente quelli della penultima moltiplicati per $-x_n$; quelli della terzultima moltiplicati per $-x_{n-1}$, e così via, il valore del determinante medesimo non si altera; ma eseguendo questa operazione il determinante V osservate le equazioni (51) (54) si trasforma nel seguente:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & -U \end{vmatrix}$$

e quindi ha luogo l' equazione (55).

La equazione $U=0$, per $n=3$ od $n=4$ può rappresentare una conica od una superficie del secondo ordine; ed in questi casi l'equazione $V=0$ rappresenterebbe le rispettive polari reciproche.

Le formole superiori sono di molto uso nella teorica delle polari reciproche ed in altre quistioni geometriche intorno le linee e le superficie del secondo ordine. Mediante la (55) possiamo risolvere il seguente problema: Data la equazione di una conica e le coordinate di un punto stabilire un criterio per distinguere quando il punto sia interno od esterno alla conica.

Siccome un punto chiamasi esterno od interno ad una conica secondo che da esso si possono condurre o no due tangenti reali alla conica, così il criterio richiesto si avrà dall' essere reali od immaginarie le coordinate dei punti di intersezione della polare del punto colla conica. Ritenendo le denominazioni dell'Applicazione 1.ª del §. 4.° trovasi facilmente che la condizione a verificarsi affinchè i rapporti $x:y:z$ delle coordinate della comune intersezione della conica $\varphi(x, y, z)=0$ e della polare del punto di coordinate x_0, y_0, z_0 sieno reali è la:

$$\begin{vmatrix} a & h & f & x_1 \\ h & b & e & y_1 \\ f & e & c & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

nella quale si è posto:

$$x_1 = ax_0 + hy_0 + fz_0\,, \quad y_1 = hx_0 + by_0 + ez_0\,, \quad z_1 = fx_0 + ey_0 + cz_0$$

ossia osservando alla equazione (55) il criterio richiesto sarà:

$$\varphi(x_0, y_0, z_0)\cdot\begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & e \\ f & e & c \end{vmatrix} < 0$$

Quindi il punto sarà esterno od interno secondo che quelle due espressioni avranno segni uguali o contrarj. Notiamo che la prima di esse annullasi quando il punto è situato sulla conica; e la seconda quando la conica sia un sistema di due rette.

2.° Considero il determinante:

$$H = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \alpha_1 & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \alpha_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & \alpha_n & z_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \alpha & \beta \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

per la formola (14) si avrà:

$$H\,\frac{d^2H}{d\alpha\,d\delta} = \frac{dH}{d\alpha}\,\frac{dH}{d\delta} - \frac{dH}{d\beta}\,\frac{dH}{d\gamma}$$

ossia ritenendo le denominazioni dell' Applicazione 1.ª e supponendo $a_{r,s} = a_{s,r}$ ed $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ si ha:

$$(56) \qquad HP = VL - M^2$$

posto:

$$L = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \alpha_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & z_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & z_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}$$

Sia $A_{r,s}$ una quantità legata colla $a_{r,s}$ dalla equazione:

$$A_{r,s} = a_{r,s} + \alpha_r \alpha_s$$

ed indico con P_1, L_1, V_1, M_1, H_1 i determinanti che si hanno ponendo nei determinanti P, L, V, M, H gli elementi $A_{r,s}$ in luogo degli elementi $a_{r,s}$. Mediante il principio che il valore di un determinante non si altera aggiungendo ordinatamente agli elementi di una linea o di una colonna quelli di un' altra linea o di un' altra colonna moltiplicati per una stessa quantità si dimostrano facilmente le equazioni:

$$L = L_1 \qquad M = M_1, \qquad H = H_1$$

Ora osserviamo che il determinante V si può scrivere nel modo seguente:

$$V = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & z_1 & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & z_2 & \alpha_2 \\ \dots & & & & & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & z_n & \alpha_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi aggiungendo: agli elementi della prima colonna quelli dell' ultima moltiplicati per α_1, agli elementi della seconda colonna quelli dell' ultima moltiplicati per α_2 e così di seguito; pel principio su esposto si avrà:

$$V = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} & z_1 & \alpha_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} & z_2 & \alpha_2 \\ \dots & & & & & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} & z_n & \alpha_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ossia:

$$V = V_1 + H_1 = V_1 + H$$

Così il determinante P si può scrivere:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & \alpha_n \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ed eseguendo l' operazione indicata più sopra si ha facilmente:

$$P = P_1 + L_1 = P_1 + L$$

Questi valori di L e di H sostituiti nell' equazione (56) danno la:

$$(57) \qquad M^2 = P V_1 - V P_1$$

Abbiamo denominata la V funzione reciproca della U; evidentemente la V_1 sarà funzione reciproca della funzione quadratica:

$$U + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)^2$$

Se supponiamo $n = 3$ le equazioni:

$$U = 0 , \quad U + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 = 0$$

rappresentano due coniche aventi doppio contatto, e le:

$$V = 0 , \qquad V_1 = 0$$

sono le corrispondenti reciproche polari. Ora per l' equazione (57) la $V_1 = 0$ può assumere la forma:

$$P_1 V + M^2 = 0.$$

il che mostra che le due reciproche polari hanno pure doppio contatto e che la corda di contatto è la retta rappresentata dall' equazione:

$$M = 0$$

Un analogo teorema ha luogo per le superfici del secondo ordine (*).

(*) Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 31.

§. 7.° Delle proprietà dei determinanti minori.

Chiamasi determinante *minore* di un determinante *completo*:

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

il determinante che si ottiene trascurando un qualsivoglia numero di linee e di colonne del determinante completo. L' ordine del determinante minore viene determinato dal numero delle linee e delle colonne che si trascurano; cosicchè il determinante:

$$(58) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \dots & a_{n-m,n-m} \end{vmatrix}$$

è un determinante minore dell' $m$esimo ordine. Se gli elementi principali del determinante minore hanno ciascuno il primo e secondo indice identici, come ha luogo pel determinante (58), il determinante minore chiamasi *principale*.

Per rappresentare questa specie di determinanti mediante simboli, consideriamo i determinanti minori dell' ordine $m$esimo del determinante P; e fatte le:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} = u$$

combinazioni ad m ad m degli indici $1, 2, \dots n$; scriviamole di seguito secondo una determinata legge; per esempio incominciando da quella nella quale il prodotto degli indici è il più piccolo, nelle altre che la seguono il medesimo prodotto vadi aumentando. A queste combinazioni così distribuite si facciano corrispondere i numeri:

$$1, 2, 3, \dots u$$

Sieno r, s due fra questi numeri; se nel determinante P si sopprimono tutti gli elementi che hanno il loro primo indice compreso nella combinazione r, ed il loro secondo indice compreso nella combinazione s, gli elementi che rimangono formeranno un determinante minore dell' ordine m. Indicheremo questo determinante

minore col simbolo ${}^{(m)}P_{r,s}$, quindi il simbolo ${}^{(m)}P_{r,r}$ rappresenterà un determinante minore principale dell' mesimo ordine. È evidente che il numero dei determinanti minori dell'mesimo ordine eguaglierà in generale il quadrato del numero u, per cui mediante i determinanti medesimi si potrà formare il determinante :

$$\begin{vmatrix} {}^{(m)}P_{1,1} & {}^{(m)}P_{1,2} & \dots & {}^{(m)}P_{1,u} \\ {}^{(m)}P_{2,1} & {}^{(m)}P_{2,2} & \dots & {}^{(m)}P_{2,u} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{(m)}P_{u,1} & {}^{(m)}P_{u,2} & \dots & {}^{(m)}P_{u,u} \end{vmatrix} = {}^{(m)}S_u$$

Questi determinanti di determinanti minori, considerati la prima volta dal Signor Cauchy (*), vennero chiamati dal medesimo autore determinanti *derivati* del determinante P.

Chiamasi determinante di *complemento* del determinante minore ${}^{(m)}P_{r,s}$ il determinante minore dell' ordine $(n-m)$ che si ottiene dal determinante P trascurando tutti gli elementi all' eccetto di quelli che hanno il primo indice compreso nella combinazione r, ed il secondo indice compreso nella combinazione s. Questo determinante di complemento può indicarsi col simbolo ${}^{(n-m)}P_{-r,-s}$; ed il determinante di complemento del determinante (58) sarebbe :

$$\begin{vmatrix} a_{\nu+1,\nu+1} & a_{\nu+1,\nu+2} & \dots & a_{\nu+1,n} \\ a_{\nu+2,\nu+1} & a_{\nu+2,\nu+2} & \dots & a_{\nu+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\nu+1} & a_{n,\nu+2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

posto $n-m=\nu$. Il determinante derivato dei determinanti di complemento dei determinanti costituenti il determinante ${}^{(m)}S_u$ si potrà indicare con ${}^{(n-m)}S_u$; ed i determinanti ${}^{(m)}S_u$, ${}^{(n-m)}S_u$ si chiamano determinanti derivati di complemento.

Rammentando la regola per la formazione dei determinanti esposta al §. 3.° (pag. 10) si concepirà facilmente la sussistenza delle due equazioni :

$$(59) \quad \begin{aligned} {}^{(m)}P_{1,s}\,{}^{(n-m)}P_{-1,-s} + {}^{(m)}P_{2,s}\,{}^{(n-m)}P_{-2,-s} + \dots + {}^{(m)}P_{u,s}\,{}^{(n-m)}P_{-u,-s} &= P \\ {}^{(m)}P_{1,s}\,{}^{(n-m)}P_{-1,-r} + {}^{(m)}P_{2,s}\,{}^{(n-m)}P_{-2,-r} + \dots + {}^{(m)}P_{u,s}\,{}^{(n-m)}P_{-u,-r} &= 0 \end{aligned}$$

Se in queste equazioni poniamo r ed s eguali ad 1, 2, 3 ... u si hanno u^2 equazioni col mezzo delle quali applicando la regola della moltiplicazione dei deter-

(*) Journal de l'École Polytecnique. Cahier 17.

minanti si ha :

$$ {}^{(m)}S_u \; {}^{(n-m)}S_u = P^u $$

La formola (43) si ottiene da questa ponendo $m=1$.

Osserviamo che per le fatte convenzioni riguardo ai simboli dei determinanti minori l' equazione (36) prende la forma :

$$ Q\,{}^{(1)}P_{r,s} = {}^{(1)}R_{r,1}\,{}^{(n-1)}Q_{-1,-s} + {}^{(1)}R_{r,2}\,{}^{(n-1)}Q_{-2,-s} + \ldots + {}^{(1)}R_{r,n}\,{}^{(n-1)}Q_{-n,-s} $$

così la (38) potrebbe scriversi :

$$ Q\,{}^{(2)}P_{r,s} = {}^{(2)}R_{r,1}\,{}^{(n-2)}Q_{-1,-s} + {}^{(2)}R_{r,2}\,{}^{(n-2)}Q_{-2,-s} + \ldots + {}^{(2)}R_{r,i}\,{}^{(n-2)}Q_{-i,-s} $$

posto $i = \frac{n(n-1)}{2}$; ed in generale la derivazione eseguita m volte sulla equazione :

$$ PQ = R $$

conduce evidentemente alla :

$$ Q\,{}^{(m)}P_{r,s} = {}^{(m)}R_{r,1}\,{}^{(n-m)}Q_{-1,-s} + {}^{(m)}R_{r,2}\,{}^{(n-m)}Q_{-2,-s} + \ldots + {}^{(m)}R_{r,u}\,{}^{(m)}Q_{-u,-s} $$

Se in questa poniamo $s=1, 2, 3 \ldots u$ si ottengono u equazioni le quali ordinatamente moltiplicate per :

$$ {}^{(m)}Q_{s,1} \quad {}^{(m)}Q_{s,2} \; \ldots \; {}^{(m)}Q_{s,u} $$

e sommate avendo riguardo alle :

$$ (60) \quad \begin{aligned} &{}^{(m)}Q_{s,1}\,{}^{(n-m)}Q_{-s,-1} + {}^{(m)}Q_{s,2}\,{}^{(n-m)}Q_{-s,-2} + \ldots + {}^{(m)}Q_{s,u}\,{}^{(n-m)}Q_{-s,-u} = Q \\ &{}^{(m)}Q_{s,1}\,{}^{(n-m)}Q_{-r,-1} + {}^{(m)}Q_{s,2}\,{}^{(n-m)}Q_{-r,-2} + \ldots + {}^{(m)}Q_{s,u}\,{}^{(n-m)}Q_{-r,-u} = 0 \end{aligned} $$

danno la seguente :

$$ (61) \qquad {}^{(m)}P_{r,1}\,{}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\,{}^{(m)}Q_{s,2} + \ldots + {}^{(m)}P_{r,u}\,{}^{(m)}Q_{s,u} = {}^{(m)}R_{r,s} $$

La (33) si ottiene da questa ponendo $m=1$. Se supponiamo $r=s$ ed identici gli elementi corrispondenti dei determinanti P, Q si avrà :

$$ (62) \qquad ({}^{(m)}P_{r,1})^2 + ({}^{(m)}P_{r,2})^2 + \ldots + ({}^{(m)}P_{r,u})^2 = {}^{(m)}R_{r,r} $$

Indicando con ${}^{(m)}T_u$, ${}^{(m)}V_u$ i determinanti derivati dei determinanti Q, R si avrà per la equazione (61) :

$$ {}^{(m)}S_u \; {}^{(m)}T_u = {}^{(m)}V_u $$

ed analogamente :

$$^{(n-m)}S_u \; ^{(n-m)}T_u = \; ^{(n-m)}V_u$$

Col mezzo delle equazioni (59) (60) si potrà ottenere una equazione la quale comprenda come caso particolare la (39). Seguendo il processo di calcolo adoperato per giungere a quest' ultima si ottiene facilmente la :

$$(63) \qquad PQ = A_{s,1} K_{s,1} + H_{s,2} K_{s,2} + \ldots + H_{s,u} K_{s,u}$$

nella quale :

$$H_{s,r} = \, ^{(m)}Q_{r,1} \; ^{(n-m)}P_{-1,-s} + \, ^{(m)}Q_{r,2} \; ^{(n-m)}P_{-2,-s} + \ldots + \, ^{(m)}Q_{r,u} \; ^{(n-m)}P_{-u,-s}$$

$$K_{s,r} = \, ^{(n-m)}Q_{-r,-1} \; ^{(m)}P_{1,s} + \, ^{(n-m)}Q_{-r,-2} \; ^{(m)}P_{2,s} + \ldots + \, ^{(n-m)}Q_{-r,-u} \; ^{(m)}P_{u,s}$$

La formola di decomposizione (63) è dovuta al Sig. Sylvester (*).

Applicazioni. 1.ª

Rappresenti :

$$U = \Sigma_r \Sigma_s a_{r,s} x_r x_s$$

una funzione quadratica ad n variabili. Trasformando questa funzione in un' altra:

$$V = \Sigma_r \Sigma_s A_{r,s} z_r z_s$$

mediante la sostituzione lineare :

$$x_1 = c_{1,1} z_1 + c_{2,1} z_2 + \ldots + c_{n,1} z_n$$

$$x_2 = c_{1,2} z_1 + c_{2,2} z_2 + \ldots + c_{n,2} z_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = c_{1,n} z_1 + c_{2,n} z_2 + \ldots + c_{n,n} z_n$$

si ha come è noto :

$$(64) \qquad A_{r,s} = A_{s,r} = c_{s,1} h_{1,r} + c_{s,2} h_{2,r} + \ldots + c_{s,n} h_{n,r}$$

essendo le $h_{1,r}$ $h_{2,r}$ . . . date dalle equazioni (27).

Supponiamo che la funzione U venga trasformata nella V, mediante una sostituzione ortogonale, cioè che i coefficienti $c_{r,s}$ della sostituzione soddisfino le equazioni :

$$c_{r,1}^2 + c_{r,2}^2 + \ldots + c_{r,n}^2 = 1$$

$$c_{r,1} c_{s,1} + c_{r,2} c_{s,2} + \ldots + c_{r,n} c_{s,n} = 0$$

(*) Philosophical Magazine 1851.

per cui:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$$

È noto che in questo caso la funzione V può ridursi alla forma:

$$V = \Sigma_r A_r z_r^2$$

e che i coefficienti A_r sono le radici dell' equazione dell' ennesimo grado:

$$(65) \qquad f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione, incontrata la prima volta da Laplace nelle sue ricerche intorno le ineguaglianze secolari dei pianeti (*), e che diede origine ai primi lavori del medesimo autore sui determinanti; ammette n radici reali come già provarono Borchardt e Jacobi (**). Rammentando il modo col quale al §. 5.° venne dimostrata questa proprietà per la equazione del terzo grado della medesima forma, è chiaro che ponendo:

$$k_{r,s} = a_{r,1}a_{s,1} + a_{r,2}a_{s,2} + \dots + a_{r,n}a_{s,n}$$

e quindi:

$$f(\lambda)f(-\lambda) = \begin{vmatrix} k_{1,1}-\lambda^2 & k_{1,2} & \dots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2}-\lambda^2 & \dots & k_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \dots & k_{n,n}-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

avremo dimostrata la realtà delle radici dell' equazione (65); quando siasi provato essere positivi tutti i coefficienti delle varie potenze di λ nell' equazione:

$$(66) \qquad (-1)^n f(\lambda)f(-\lambda) = \lambda^{2n} - H_{n-1}\lambda^{2n-2} + H_{n-2}\lambda^{2n-4} \dots \mp H_1\lambda^2 \pm H_0$$

Ora il coefficiente di λ^{2m} risulta evidentemente dalla somma dei determinanti minori principali dell' m^o ordine del determinante:

$$\begin{vmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \dots & k_{n,n} \end{vmatrix}$$

(*) Histoire de l'Académie des Sciences. Année 1772.

(**) Journal de Liouville Tome 12. — Jacobi. Matematische Werke. Band. 1.

Indicando con ${}^{(m)}R_{r,r}$ uno qualunque di questi determinanti minori principali e con P il determinante $f(o)$, ed osservando che fra il determinante ${}^{(m)}R_{r,r}$ ed i determinanti minori del determinante P sussiste la equazione (62), ne consegue che il coefficiente H_m eguaglia la somma dei quadrati di tutti i determinanti minori dell' emmesimo ordine del determinante P. Quindi tutti i coefficienti della (66) saranno positivi, e le radici della (65) saranno reali.

2.ª Ritenendo le denominazioni dell'Applicazione 1.ª si indichi con N il determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Qualunque sia la sostituzione lineare col mezzo della quale la funzione U si trasforma nella V, fra i determinanti minori del determinante P ed i determinanti minori del determinante N ha luogo una importante relazione che ora veniamo a stabilire. Osserviamo che per l' equazione (64) essendo:

$$N = QR$$

abbiamo analogamente alla (61):

$${}^{(m)}Q_{\nu,1}\, {}^{(m)}R_{1,s} + {}^{(m)}Q_{\nu,2}\, {}^{(m)}R_{2,s} + \dots + {}^{(m)}Q_{\nu,u}\, {}^{(m)}R_{u,s} = {}^{(m)}N_{\nu,s}$$

e quindi ricavando dalla (61) medesima i valori di:

$${}^{(m)}R_{1,s}\,,\quad {}^{(m)}R_{2,s}\,\dots\dots\, {}^{(m)}R_{u,s}$$

e sostituendoli in quest' ultima si ha:

$${}^{(m)}N_{\nu,s} = \Sigma_r\, {}^{(m)}Q_{\nu,r} \left\{ {}^{(m)}P_{r,1}\, {}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\, {}^{(m)}Q_{s,2} + \dots + {}^{(m)}P_{r,u}\, {}^{(m)}Q_{s,u} \right\}$$

la quale è la relazione accennata sopra. Se in questa equazione poniamo $\nu = s$, e quindi $s = 1, 2 \dots u$ otteniamo la:

$$\Sigma_s\, {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_r \Sigma_s\, {}^{(m)}Q_{s,r} \left\{ {}^{(m)}P_{r,1}\, {}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\, {}^{(m)}Q_{s,2} + \dots + {}^{(m)}P_{r,u}\, {}^{(m)}Q_{s,u} \right\}$$

la quale supponendo:

$$Q^2 = M$$

trasformasi nella :

$$\Sigma_s\, {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_r \left({}^{(m)}P_{r,1}\, {}^{(m)}M_{r,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\, {}^{(m)}M_{r,2} + \ldots + {}^{(m)}P_{r,u}\, {}^{(m)}M_{r,u} \right)$$

Quest' ultima poteva ottenersi anche direttamente essendo $PM = N$.

Se la sostituzione lineare per la quale la U trasformasi nella V sarà ortogonale si hanno evidentemente le :

$${}^{(m)}M_{r,r} = 1 \qquad {}^{(m)}M_{r,s} = 0$$

e quindi :

$$\Sigma_s\, {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_s\, {}^{(m)}P_{s,s}$$

formola nota.

3.° Supponiamo che nelle due funzioni quadratiche U , V sieno :

$$(67) \qquad \begin{aligned} a_{r,s} = a_{s,r} &= \gamma_{r,1}\gamma_{s,1} + \gamma_{r,2}\gamma_{s,2} + \ldots + \gamma_{r,n}\gamma_{s,n} \\ A_{r,s} = A_{s,r} &= \gamma_{1,r}\gamma_{1,s} + \gamma_{2,r}\gamma_{2,s} + \ldots + \gamma_{n,r}\gamma_{n,s} \end{aligned}$$

in questo caso, quelle funzioni sono eguali fra loro, cioè si ponno ridurre ad una medesima mediante una sostituzione lineare. Infatti indicando con H il determinante :

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,n} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \ldots & \gamma_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \ldots & \gamma_{n,n} \end{vmatrix}$$

per le (67) si avrà :

$$P = N = H^2$$

cioè i determinanti P , N , i quali si ottengono eseguendo il quadrato del determinante H per linee o per colonne, saranno eguali in valore ma di forma differente. La eguaglianza delle due funzioni U , V sarà dimostrata allorquando sarà provato essere eguali fra loro i coefficienti delle medesime potenze di λ nelle due equazioni dell' ennesimo grado :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1}-\lambda & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2}-\lambda & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Osserviamo che il coefficiente di λ^m nella prima equazione è formato dalla somma dei determinanti minori principali dell' emmesimo ordine del determinante P ;

ed il coefficiente di λ^m nella seconda equazione dalla somma dei determinanti minori principali dell' emmesimo ordine del determinante N. E siccome si hanno le :

$$^{(m)}P_{r,r} = (^{(m)}H_{r,1})^2 + (^{(m)}H_{r,2})^2 + \ldots + (^{(m)}H_{r,u})^2$$

$$^{(m)}N_{r,r} = (^{(m)}H_{1,r})^2 + (^{(m)}H_{2,r})^2 + \ldots + (^{(m)}H_{u,r})^2$$

sussisterà l' equazione :

$$\Sigma_r\, {}^{(m)}P_{r,r} = \Sigma_r\, {}^{(m)}N_{r,r}$$

cioè i due coefficienti di λ^m nelle due equazioni superiori saranno identici.

Esempio. Le elissoidi rappresentate dalle due equazioni :

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=k^2$$

$$(a_1x+a_2y+a_3z)^2+(b_1x+b_2y+b_3z)^2+(c_1x+c_2y+c_3z)^2=k^2$$

sono eguali fra loro (*).

4.° Il sistema di equazioni algebriche lineari :

$$(68)\qquad \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,s}x_s = u_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,s}x_s = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,s}x_s = u_n \end{array}$$

nel quale $n > s$, viene denominato sistema *sovrabbondante*, essendo composto di un numero di equazioni maggiore di quello necessario alla ricerca dei valori delle incognite.

Supponiamo che le quantità $u_1, u_2 \ldots u_n$ sieno legate dalle s equazioni :

$$(69)\qquad \begin{array}{l} c_{1,1}u_1 + c_{2,1}u_2 + \ldots + c_{n,1}u_n = v_1 \\ c_{1,2}u_1 + c_{2,2}u_2 + \ldots + c_{n,2}u_n = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{1,s}u_1 + c_{2,s}u_2 + \ldots + c_{n,s}u_n = v_s \end{array}$$

e sostituendo in queste per le $u_1, u_2 \ldots u_n$ medesime i valori dati dalle (68) si otterranno le :

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques rédigé par M.r Terquem. Juillet 1853.

$$h_{1,1}x_1 + h_{2,1}x_2 + \ldots + h_{s,1}x_s = v_1$$

(70) $$h_{1,2}x_1 + h_{2,2}x_2 + \ldots + h_{s,2}x_s = v_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_{1,s}x_1 + h_{2,s}x_2 + \ldots + h_{s,s}x_s = v_s$$

supposto :

(71) $$a_{1,r}c_{1,t} + a_{2,r}c_{2,t} + \ldots + a_{n,r}c_{n,t} = h_{r,t}$$

Dalle equazioni (70) si deducono le seguenti :

$$Hx_1 = v_1\frac{dH}{dh_{1,1}} + v_2\frac{dH}{dh_{1,2}} + \ldots + v_s\frac{dH}{dh_{1,s}}$$

$$Hx_2 = v_1\frac{dH}{dh_{2,1}} + v_2\frac{dH}{dh_{2,2}} + \ldots + v_s\frac{dH}{dh_{2,s}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Hx_s = v_1\frac{dH}{dh_{s,1}} + v_2\frac{dH}{dh_{s,2}} + \ldots + v_s\frac{dH}{dh_{s,s}}$$

nelle quali H rappresenta il determinante :

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \ldots & h_{1,s} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \ldots & h_{2,s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{s,1} & h_{s,2} & \ldots & h_{s,s} \end{vmatrix}$$

e se in queste ultime si pongono in luogo di $v_1, v_2 \ldots v_s$ i valori dati dalle (69) si ottengono le :

$$Hx_1 = k_{1,1}u_1 + k_{1,2}u_2 + \ldots + k_{1,n}u_n$$

$$Hx_2 = k_{2,1}u_1 + k_{2,2}u_2 + \ldots + k_{2,n}u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Hx_s = k_{s,1}u_1 + k_{s,2}u_2 + \ldots + k_{s,n}u_n$$

essendo :

$$k_{r,i} = c_{i,1}\frac{dH}{dh_{r,1}} + c_{i,2}\frac{dH}{dh_{r,2}} + \ldots + c_{i,s}\frac{dH}{dh_{r,s}}$$

Ora si osservi che per la (71) si ha :

$$c_{i,s} = \frac{dh_{r,s}}{da_{i,r}}$$

quindi :

$$k_{r,i} = \frac{dH}{da_{i,r}}$$

e sostituendo :

$$
(72)\qquad
\begin{aligned}
H x_1 &= u_1 \frac{dH}{da_{1,1}} + u_2 \frac{dH}{da_{2,1}} + \dots + u_n \frac{dH}{da_{n,1}} \\
H x_2 &= u_1 \frac{dH}{da_{1,2}} + u_2 \frac{dH}{da_{2,2}} + \dots + u_n \frac{dH}{da_{n,2}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
H x_s &= u_1 \frac{dH}{da_{1,s}} + u_2 \frac{dH}{da_{2,s}} + \dots + u_n \frac{dH}{da_{n,s}}
\end{aligned}
$$

Il determinante H è un determinante minore principale dell' $(n-s)$esimo ordine del determinante R (equazione 28); quindi rappresentandolo dietro le convenzioni del §. 7.° col simbolo ${}^{(n-s)}R_{u,u}$ si avrà analogamente alla (61) :

$$H = {}^{(n-s)}R_{u,u} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}$$

Quindi le equazioni (72) assumeranno la forma :

$$
(73)\qquad
\begin{aligned}
x_1 \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1 \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,1}} + \dots + u_n \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,1}} \\
x_2 \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1 \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,2}} + \dots + u_n \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,2}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_s \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1 \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,s}} + \dots + u_n \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,s}}
\end{aligned}
$$

Osserviamo che il determinante ${}^{(n-s)}P_{u,r}$ contiene solamente un numero s^2 degli elementi costituenti il determinante P , e che i primi indici di quegli elementi non ponno essere fra quelli della combinazione u. Indicando con :

$$
\begin{vmatrix}
a_{r_1,1} & a_{r_2,1} & \dots & a_{r_s,1} \\
a_{r_1,2} & a_{r_2,2} & \dots & a_{r_s,2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{r_1,s} & a_{r_2,s} & \dots & a_{r_s,s}
\end{vmatrix}
$$

il determinante ${}^{(n-s)}P_{u,r}$, le equazioni (73) si trasformano nelle:

$$x_1 \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}\left\{ u_{r_1} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,1}} + \ldots + u_{r_s} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,1}} \right\}$$

(74) $$x_2 \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}\left\{ u_{r_1} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,2}} + \ldots + u_{r_s} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,2}} \right\}$$

. . . .

$$x_s \Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r} = \Sigma_r\, {}^{(n-s)}Q_{u,r}\left\{ u_{r_1} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,s}} + \ldots + u_{r_s} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,s}} \right\}$$

essendo $r_1, r_2 \ldots r_s$ numeri differenti fra loro ed appartenenti alla serie $1, 2, 3 \ldots n$.

Se ora da s fra le equazioni (68) si ricavano i valori di $x_1, x_2 \ldots x_s$; per esempio da quelle nelle quali le $u_1, u_2, \ldots u_n$ hanno gli indici $r_1, r_2 \ldots r_s$ si hanno le:

$$(x_1)\,{}^{(n-s)}P_{u,r} = u_{r_1} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,1}} + \ldots + u_{r_s} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,1}}$$

(75) $$(x_2)\,{}^{(n-s)}P_{u,r} = u_{r_1} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,2}} + \ldots + u_{r_s} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,2}}$$

. . . .

$$(x_s)\,{}^{(n-s)}P_{u,r} = u_{r_1} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,s}} + \ldots + u_{r_s} \frac{d\,{}^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,s}}$$

essendo poste le $x_1, x_2 \ldots$ fra parentesi perchè dedotte da un sistema sovrabbondante. Dal confronto delle equazioni (74) (75) si ha quindi:

$$x_1 = \frac{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}(x_1)}{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}},\quad x_2 = \frac{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}(x_2)}{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}} \ldots x_s = \frac{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}(x_s)}{\Sigma_r\, {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}}$$

e se i coefficienti delle $x_1, x_2 \ldots$ nelle equazioni (68) fossero rispettivamente identici a quelli delle $u_1, u_2 \ldots$ nelle (69) si avrebbero le:

$$x_1 = \frac{\Sigma_r ({}^{(n-s)}P_{u,r})^2 (x_1)}{\Sigma_r ({}^{(n-s)}P_{u,r})^2},\quad x_2 = \frac{\Sigma_r ({}^{(n-s)}P_{u,r})^2 (x_2)}{\Sigma_r ({}^{(n-s)}P_{u,r})^2} \quad \ldots \quad x_s = \frac{\Sigma_r ({}^{(n-s)}P_{u,r})^2 (x_s)}{\Sigma_r ({}^{(n-s)}P_{u,r})^2}$$

§. 8.° Dei determinanti gobbi e dei determinanti simmetrici.

Un determinante P gli elementi del quale soddisfano alla equazione:

$$a_{r,s} + a_{s,r} = 0$$

chiamasi determinante *gobbo*. E se quegli elementi oltre a questa condizione soddisfano anche alla:

$$a_{r,r} = 0$$

il determinante gobbo si dice essere *simmetrico*.

La considerazione dei determinanti gobbi simmetrici si fa precedere a quella dei determinanti puramente gobbi giacchè questi si ponno esprimere col mezzo dei primi. Per dimostrare questa proprietà osserviamo come in generale un determinante P qualunque si può esprimere col mezzo di determinanti nei quali gli elementi principali sono nulli. Infatti indicando con P_0 il determinante nel quale si pongano eguali a zero gli elementi principali; e con $({}^{(m)}P_{i,i})_0$ un determinante minore principale dell' mesimo ordine del determinante P nel quale siensi annullati gli elementi principali si ha:

$$(76) \quad P = P_0 + \Sigma_r a_{r,r} ({}^{(1)}P_{i,i})_0 + \Sigma_r \Sigma_s a_{r,r} a_{s,s} ({}^{(2)}P_{i,i})_0 + \ldots + a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

Esempio.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \beta_3 & 0 \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1 \beta_2 \gamma_3.$$

Ora se il determinante P è gobbo evidentemente i determinanti minori principali $({}^{(m)}P_{i,i})_0$ sono gobbi simmetrici e quindi ha luogo la proprietà dichiarata.

I determinanti gobbi simmetrici si distinguono da ogni altra specie di determinanti per le due seguenti proprietà particolari ad essi.

1.° Ogni determinante simmetrico gobbo d' ordine dispari è eguale a zero. Infatti osserviamo che lo sviluppo del determinante P supposto gobbo simmetrico e d' ordine dispari conterrà i due termini:

$$\pm a_{r,1}\, a_{1,s} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \dots & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \dots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \dots & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$\pm a_{1,r}\, a_{s,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \dots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \dots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \dots & a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \dots & a_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Ora se si moltiplicano gli elementi di ciascuna colonna di quest' ultimo determinante per -1, osservando che le colonne medesime sono in numero dispari essendolo n ed avendo riguardo alla relazione $a_{r,s}+a_{s,r}=0$, quel secondo termine potrà scriversi:

$$\mp a_{1,r}\, a_{s,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{3,2} & \dots & a_{r-1,2} & a_{r+1,2} & \dots & a_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2,s-1} & a_{3,s-1} & \dots & a_{r-1,s-1} & a_{r+1,s-1} & \dots & a_{n,s-1} \\ a_{2,s+1} & a_{3,s+1} & \dots & a_{r-1,s+1} & a_{r+1,s+1} & \dots & a_{n,s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{r-1,n} & a_{r+1,n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

e siccome quest' ultimo determinante è identico al determinante del primo termine ed $a_{r,1}a_{1,s}=a_{1,r}a_{s,1}$ quei due termini si elidono. Quindi in quello sviluppo non rimarranno che termini della forma:

$$\pm a_{1,r}\, a_{r,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \dots & 0 & a_{r-1,r+1} & \dots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \dots & a_{r+1,r-1} & 0 & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ma quest' ultimo determinante è simmetrico, gobbo e dell'ordine $n-2$ dispari, quindi ogni determinante simmetrico gobbo d' ordine dispari sarà nullo quando lo sia il determinante simmetrico gobbo del terzo ordine. Ora lo sviluppo di questo determinante essendo :

$$a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}=0$$

la proprietà ha luogo in generale.

2.ª Un determinante gobbo simmetrico d' ordine pari è un quadrato. Infatti lo sviluppo del determinante P conterrà i termini :

$$a^2_{1,r}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \dots & 0 & a_{r-1,r+1} & \dots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \dots & a_{r+1,r-1} & 0 & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad a^2_{1,s}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \dots & 0 & a_{s-1,s+1} & \dots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \dots & a_{s+1,s-1} & 0 & \dots & a_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pm 2a_{1,r}a_{1,s}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \dots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \dots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \dots & a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \dots & a_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

I coefficienti di $a^2_{1,r}$, $a^2_{1,s}$, $\pm 2a_{1,r}a_{1,s}$ si ponno ordinatamente rappresentare mediante le :

$$-\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{r,1}}, \quad -\frac{d^2P}{da_{1,s}\,da_{s,1}}, \quad \pm\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{s,1}}.$$

Ora per la formola (14) si hanno le :

$$P\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{r,1}}=\frac{dP}{da_{1,r}}\,\frac{dP}{da_{r,1}}, \; P\frac{d^2P}{da_{1,s}\,da_{s,1}}=\frac{dP}{da_{1,s}}\,\frac{dP}{da_{s,1}}, \; P\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{s,1}}=\frac{dP}{da_{1,r}}\,\frac{dP}{da_{s,1}}$$

essendo $\frac{dP}{da_{i,i}}=0$, perchè determinante gobbo simmetrico d'ordine dispari. Queste

equazioni osservando alla :

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = -\frac{dP}{da_{s,r}}$$

che evidente ha luogo per qualunque determinante simmetrico gobbo d'ordine pari, danno la :

$$\left(\frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{s,1}}\right)^2 = \frac{d^2P}{da_{1,r}\,da_{r,1}}\,\frac{d^2P}{da_{1,s}\,da_{s,1}}$$

nella quale equazione trovasi appunto espressa la proprietà che il determinante P è un quadrato.

Perciò lo sviluppo del determinante P potrà assumere la forma :

$$P = \left\{\pm a_{1,2}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}\,da_{2,2}}\right)^{\frac{1}{2}} \pm a_{1,3}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}\,da_{3,3}}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \ldots \pm a_{1,n}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}\,da_{n,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

o più in generale :

$$(77) \qquad P = \left\{\Sigma_s \pm a_{r,s}\left(\frac{d^2P}{da_{r,r}\,da_{s,s}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

nelle quali espressioni pongasi $a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots = 0$. È da notarsi che il determinante $\frac{d^2P}{da_{r,r}\,da_{s,s}}$ è un quadrato essendo un determinante simmetrico gobbo dell'ordine $n-2$ pari.

Esempio. Supponiamo :

$$P = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{vmatrix}$$

si avrà :

$$P = \left\{a_{1,2}\begin{vmatrix} 0 & a_{3,4} \\ a_{4,3} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} - a_{1,3}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,4} \\ a_{4,2} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + a_{1,4}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} \\ a_{3,2} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

ossia :

$$P = (a_{1,2}\,a_{3,4} - a_{1,3}\,a_{2,4} + a_{1,4}\,a_{2,3})^2$$

Indicando con H la radice quadrata del determinante P, è importante il dimostrare come questa quantità sia dotata di una proprietà analoga ad una delle principali dei determinanti. Derivando l' equazione $P = H^2$ rispetto ad $a_{r,s}$ si ha :

$$(78) \qquad \frac{dP}{da_{r,s}} = H\frac{dH}{da_{r,s}}$$

nella quale si è tralasciato il coefficiente 2 giacchè nel primo membro la derivata di P rispetto ad $a_{r,s}$ rappresenta il determinante dell' $n-1$ ordine il quale si deduce dal P trascurando la sesima colonna e la resima linea, cioè non considerando essere $a_{r,s}=-a_{s,r}$; mentre derivando la espressione algebrica H viene naturalmente a considerarsi quella eguaglianza. Quadrando l' equazione superiore si ha:

$$\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2 = P\left(\frac{dH}{da_{r,s}}\right)$$

e siccome:

$$P\frac{d^2P}{da_{r,r}\,da_{s,s}} = \left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2$$

così:

$$\left(\frac{d^2P}{da_{r,r}\,da_{s,s}}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{dH}{da_{r,s}}.$$

Questo valore sostituito nella equazione (77) dà:

$$P = \left\{\Sigma_s\left(a_{r,s}\frac{dH}{da_{r,s}}\right)\right\}^2$$

e quindi:

$$H = \Sigma_s\left(a_{r,s}\frac{dH}{da_{r,s}}\right)$$

la quale equazione contiene una proprietà della funzione H analoga ad una nota dei determinanti.

Ma la proprietà caratteristica di queste funzioni H consiste nel cambiare di segno che esse fanno al permutarsi di due indici. Supponiamo che nella funzione H vengano permutati gli indici r, s; siccome in quei termini della funzione medesima nei quali trovasi l' elemento $a_{r,s}$ non vi sono altri elementi affetti da quegli indici; denominando H_1 ciò che diventa la funzione H quando si eseguisca la permutazione indicata si avrà:

$$\frac{dH}{da_{r,s}} = -\frac{dH_1}{da_{r,s}}$$

Ora eseguendo quella permutazione sul determinante P esso non cambia di valore, e si riduce facilmente alla sua primitiva forma, quindi per l'equazione (78)

si avrà :

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = H_1 \frac{dH_1}{da_{r,s}} = - H_1 \frac{dH}{da_{r,s}}$$

e per conseguenza :

$$H_1 = - H$$

È evidente che se si permuteranno due coppie di indici il segno ed il valore di H rimarrà inalterato.

Applicazione.

Indicando con q_1, $q_2 \ldots q_n$, n variabili indipendenti in funzione delle quali sieno date le coordinate dei punti di un sistema in movimento, con T la semi-somma delle forze vive, e con p_1, $p_2 \ldots p_n$ ordinatamente le espressioni :

$$\frac{dT}{dq_1'}, \; \frac{dT}{dq_2'} \cdots \frac{dT}{dq_n'}$$

è noto come le formole per la variazione delle costanti arbitrarie in causa di forze perturbatrici contengano espressioni analoghe all'una od all'altra delle due seguenti:

$$\left[a_i, a_s\right] = \Sigma_r \left(\frac{dp_r}{da_i}\frac{dq_r}{da_s} - \frac{dp_r}{da_s}\frac{dq_r}{da_i}\right)$$

$$\left(a_i, a_s\right) = \Sigma_r \left(\frac{da_i}{dp_r}\frac{da_s}{dq_r} - \frac{da_i}{dq_r}\frac{da_s}{dp_r}\right)$$

nelle quali la r deve assumere i valori $1, 2 \ldots 2n$ e le a_1, $a_2 \ldots a_{2n}$ sono $2n$ costanti arbitrarie introdotte dalla integrazione delle formole del movimento. Il Signor Cauchy ha dimostrato (*) che queste espressioni sono legate da $2n$ gruppi di equazioni della specie del seguente :

$$(79) \qquad \begin{array}{l} a_{r,1} c_{1,1} + a_{r,2} c_{1,2} + \ldots + a_{r,2n} c_{1,2n} = 0 \\ a_{r,1} c_{2,1} + a_{r,2} c_{2,2} + \ldots + a_{r,2n} c_{2,2n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r,1} c_{r,1} + a_{r,2} c_{r,2} + \ldots + a_{r,2n} c_{r,2n} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r,1} c_{2n,1} + a_{r,2} c_{2n,2} + \ldots + a_{r,2n} c_{2n,2n} = 0 \end{array}$$

(*) Journal de Liouville. T.° 2. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences. Juillet 1853.

avendo posto per brevità:

$$[a_i\,,\ a_s] = c_{i,s} \qquad (a_i\,,\ a_s) = a_{i,s}$$

Le espressioni $c_{i,s}$, $a_{i,s}$ verificano evidentemente le equazioni:

$$c_{s,s} = a_{s,s} = 0 \qquad c_{i,s} = -c_{s,i} \qquad a_{i,s} = -a_{s,i}$$

quindi i due determinanti :

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,2n} \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,2n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2n,1} & c_{2n,2} & \dots & c_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

saranno determinanti gobbi simmetrici d' ordine pari.

Osserviamo che per le (79) ed analoghe fra i determinanti P , Q ha luogo la relazione :

$$PQ = 1$$

e che dalle equazioni (79) medesime si ottiene :

$$a_{r,s} = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dc_{r,s}}$$

ossia ponendo $Q = K^2$, essendo per l' equazione (78) :

$$\frac{dQ}{dc_{r,s}} = K \frac{dK}{dc_{r,s}}$$

si otterrà :

$$a_{r,s} = \frac{1}{K} \frac{dK}{dc_{r,s}}$$

mediante la quale si hanno tutti i valori delle $(a_r\,,\ a_s)$ in funzione delle $[a_r\,,\ a_s]$.

La equazione (76) in causa delle due proprietà dimostrate pei determinanti gobbi simmetrici , assume , supponendo P un determinante gobbo qualunque , una delle due forme :

per n pari $\quad P = P_0 + \Sigma_r \Sigma_s a_{r,r} a_{s,s} ({}^{(2)}P_{i,i})_0 + \dots + a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$

per n dispari $P = \Sigma_r a_{r,r} ({}^{(1)}P_{i,i})_0 + \dots + a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$.

Se gli elementi principali saranno tutti eguali all'unità queste ultime formole diventano :

$$P = P_0 + \Sigma_i ({}^{(2)}P_{i,i})_0 + \ldots + 1$$

$$P = \Sigma_i ({}^{(1)}P_{i,i})_0 + \Sigma_i ({}^{(3)}P_{i,i})_0 + \ldots + 1$$

e siccome i determinanti gobbi simmetrici d'ordine pari P_0, $({}^{(1)}P_{i,i})_0$, $({}^{(2)}P_{i,i})_0$ ecc. sono quadrati, il determinante P risulterà, tanto pel caso di n pari come per quello di n dispari, eguale ad una somma di quadrati.

Esempj. Supponiamo $n = 4$

$$P = (a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3})^2 + a^2_{1,2} + a^2_{1,3} + a^2_{1,4} + a^2_{2,3} + a^2_{2,4} + a^2_{3,4} + 1$$

e per $n = 3$

$$P = a^2_{1,2} + a^2_{1,3} + a^2_{2,3} + 1$$

Si considerino i due gruppi di equazioni :

$$(80) \quad \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = u_1 & a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n = v_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = u_2 & a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = u_n & a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = v_n \end{array}$$

nei quali si suppongano :

$$a_{r,r} = 1 \;, \qquad a_{r,s} + a_{s,r} = 0$$

e moltiplicando le equazioni del primo ordinatamente per le quantità :

$$c_{r,1} \;,\; c_{r,2} \ldots c_{r,n}$$

e sommando i risultati si avrà :

$$(81) \qquad h_{r,1}x_1 + h_{r,2}x_2 + \ldots + h_{r,n}x_n = c_{r,1}u_1 + c_{r,2}u_2 + \ldots + c_{r,n}u_n$$

essendo :

$$(82) \qquad a_{1,s}c_{r,1} + a_{2,s}c_{r,2} + \ldots + a_{n,s}c_{r,n} = h_{r,s}$$

Indicando con P il determinante gobbo formato cogli elementi $a_{r,s}$, e posto

$\alpha_{r,s} = \dfrac{dP}{da_{r,s}}$ si suppongano essere :

(83) $$Pc_{r,1} = 2\alpha_{1,r}\ ,\ \ Pc_{r,2} = 2\alpha_{2,r}\ \ldots\ Pc_{r,r} = 2\alpha_{r,r} - P\ \ldots\ Pc_{r,n} = 2\alpha_{n,r}$$

si avranno evidentemente dalla equazione (82) le :

$$h_{r,r} = 1 \qquad h_{r,s} = -a_{r,s}$$

e quindi la (81) trasformasi nella :

$$a_{1,r}x_1 + a_{2,r}x_2 + \ldots + a_{n,r}x_n = c_{r,1}u_1 + c_{r,2}u_2 + \ldots + c_{r,n}u_n$$

ossia osservando al secondo gruppo di equazioni (80) si otterranno le seguenti :

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{1,1}u_1 + c_{1,2}u_2 + \ldots + c_{1,n}u_n \\ v_2 &= c_{2,1}u_1 + c_{2,2}u_2 + \ldots + c_{2,n}u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= c_{n,1}u_1 + c_{n,2}u_2 + \ldots + c_{n,n}u_n \end{aligned}$$

Operando sul secondo gruppo di equazioni (80) analogamente a quanto si è fatto pel primo si giungerà alle equazioni :

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{1,1}v_1 + c_{2,1}v_2 + \ldots + c_{n,1}v_n \\ u_2 &= c_{1,2}v_1 + c_{2,2}v_2 + \ldots + c_{n,2}v_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= c_{1,n}v_1 + c_{2,n}v_2 + \ldots + c_{n,n}v_n \end{aligned}$$

Dal confronto di questi due ultimi gruppi di equazioni risulta che i coefficienti $c_{r,s}$ sono legati dalle $\dfrac{n(n+1)}{2}$ equazioni :

(84) $$\begin{aligned} c_{1,r}c_{1,s} + c_{2,r}c_{2,s} + \ldots + c_{n,r}c_{n,s} &= 0 \\ c^2_{1,r} + c^2_{2,r} + \ldots + c^2_{n,r} &= 1 \end{aligned}$$

ed essendo i coefficienti medesimi in numero n^2, un numero $\dfrac{n(n-1)}{2}$ di essi sarà arbitrario e si potranno determinare gli altri $\dfrac{n(n+1)}{2}$ in funzione dei primi; od an-

che si potranno determinare tutti quegli n^2 coefficienti in funzione di $\frac{n(n-1)}{2}$ quantità arbitrarie. I valori dei coefficienti $c_{r,s}$ forniti dalle (83) soddisfano appunto a queste condizioni, mentre per essi saranno evidentemente verificate le equazioni (84); e le quantità $a_{r,s}$ delle quali quei coefficienti sono dati in funzione sono in numero $\frac{n(n-1)}{2}$.

Esempio. Sia:

$$h = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

si avranno le nove equazioni:

$$\begin{array}{llll} & h a_1 = 1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 & h b_1 = 2(\lambda\mu-\nu) & h c_1 = 2(\lambda\nu+\mu) \\ (85) & h a_2 = 2(\lambda\mu+\nu) & h b_2 = 1+\mu^2-\lambda^2-\nu^2 & h c_2 = 2(\mu\nu-\lambda) \\ & h a_3 = 2(\lambda\nu-\mu) & h b_3 = 2(\mu\nu+\lambda) & h c_3 = 1+\nu_2-\lambda^2-\mu^2 . \end{array}$$

e le quantità a_1, a_2 ... legate dalle sei equazioni:

$$\begin{array}{ll} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0 \end{array}$$

potranno rappresentare i nove coseni degli angoli che due terne di assi ortogonali comprendono fra loro. In questo caso le quantità arbitrarie λ, μ, ν ponno assumere una rappresentazione geometrica come ha dimostrato il Sig. Rodriguez (*).

Conviene osservare che nel caso in cui due assi di una delle due terne non comprendessero fra loro un angolo retto, cioè fosse:

$$a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=\omega$$

si potranno determinare i valori dei nove coseni in funzione delle tre quantità λ, μ, ν e di ω; giacchè per sei fra questi coseni p. e. per a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 si po-

(*) Journal de Liouville. T.° V. Le formole trovate dal Sig. Rodrigues non differiscono però che nella forma da quelle date dall' Eulero e dal Lexell nel Tomo XX dei Novi Commentarii Academiae Petropolitanae. 1775.

tranno ritenere i valori superiori; ed i valori dei tre coseni a_2, b_2, c_2 verranno dati in funzione delle λ, μ, ν, ω col mezzo delle note equazioni:

$$a_1(1-\omega^2)=b_2c_3-b_3c_2\,,\quad b_1(1-\omega^2)=c_2a_3-a_2c_3\,,\quad c_1(1-\omega^2)=a_2b_3-a_3b_2$$

e della:

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2=1\,.$$

Applicazioni. 1.ª

Teorema. Il determinante:

$$H=\begin{vmatrix} c_{1,1}-1 & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2}-1 & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n}-1 \end{vmatrix}$$

è eguale a zero quando n sia dispari, ed è eguale a $2^n\,\frac{P_2}{P}$ per n pari.

Infatti sostituendo nel determinante H per $c_{1,1}\,c_{1,2}\dots$ i valori (83) si ha:

$$H=\frac{2^n}{P^n}\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}-P & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2}-P & \dots & \alpha_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \dots & \alpha_{n,n}-P \end{vmatrix}$$

e moltiplicando quest' ultimo determinante pel determinante P si ottiene facilmente:

$$H=(-1)^n\,\frac{2^n}{P}\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Ora se n è dispari il determinante del secondo membro essendo gobbo simmetrico d' ordine dispari sarà eguale a zero e quindi $H=0$, e se n è pari si avrà $H=2^n\,\frac{P_2}{P}$.

Nel caso di $n=3$ questo teorema comprende la dimostrazione di una proprietà enunciata dall'Eulero la quale ha luogo nel movimento di un corpo rigido (*). Que-

(*) Theoria motus corporum rigidorum. 1750. Questa proprietà venne dimostrata dal Piola col mezzo delle formole di Monge in una memoria pubblicata negli Atti della Società Italiana delle Scienze. 1839.

sta proprietà consiste nel potersi sempre assegnare una retta passante per un punto arbitrario del corpo (centro), e moventesi con esso, la direzione della quale sia alla fine di un tempo finito qualunque parallela a quella che essa già ebbe al principio del tempo. Indicando con x, y, z le coordinate di un punto del corpo rispetto a tre assi fissi nel medesimo, i coseni degli angoli che la retta passante per quel punto, e per il centro fanno al principio del tempo con tre assi fissi nello spazio sono:

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} .$$

ed i coseni degli angoli che la medesima retta farà alla fine di un tempo finito qualsivoglia con questi assi fissi saranno:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad \frac{a_2x+b_2y+c_2z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad \frac{a_3x+b_3y+c_3z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

essendo $a_1, a_2 \ldots$ i nove coseni degli angoli ecc. Quindi pel parallelismo delle due direzioni di quella retta dovrebbero verificarsi le:

$$x=a_1x+b_1y+c_1z$$

$$y=a_2x+b_2y+c_2z$$

$$z=a_3x+b_3y+c_3z$$

ossia dovrebbe essere:

$$\begin{vmatrix} a_1-1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-1 \end{vmatrix} = 0$$

il che appunto ha luogo pel teorema dimostrato.

Stimiamo non inopportuno l' aggiungere come si possano direttamente trovare i valori geometrici delle indeterminate λ, μ, ν di cui si è detto più sopra. A ciò osserviamo che per le equazioni (85) si hanno le:

$$\lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1=\lambda$$

$$\lambda a_2+\mu b_2+\nu c_2=\mu$$

$$\lambda a_3+\mu b_3+\nu c_3=\nu$$

quindi potremo porre:

$$\lambda = k\cos\alpha\,,\quad \mu = k\cos\beta\,,\quad \nu = k\cos\gamma$$

essendo k una indeterminata, ed α, β, γ gli angoli che la retta, la quale nelle due posizioni del corpo ha direzioni parallele, fa coi tre assi fissi nel corpo. Se indichiamo con θ l'angolo diedro compreso dal piano che passa per la direzione di questa retta e da uno degli assi fissi nel corpo supposto il corpo nella prima posizione, e dal piano determinato dalle medesime rette quando il corpo è nella seconda posizione; il quale angolo non varia qualunque sia l'asse che si consideri, si avranno per una nota formola le:

$$a_1 = \text{sen}^2\alpha\cos\theta + \cos^2\alpha$$

$$b_2 = \text{sen}^2\beta\cos\theta + \cos^2\beta$$

$$c_3 = \text{sen}^2\gamma\cos\theta + \cos^2\gamma$$

dalle quali:

$$a_1 + b_2 + c_3 = 1 + 2\cos\theta$$

e per le (85):

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\theta$$

In questo modo viene a determinarsi la k e si ottengono le:

$$\lambda = \text{tang}\tfrac{1}{2}\theta.\cos\alpha\,,\quad \mu = \text{tang}\tfrac{1}{2}\theta.\cos\beta\,,\quad \nu = \text{tang}\tfrac{1}{2}\theta.\cos\gamma$$

Osserviamo che il teorema meccanico dell'Eulero corrisponde al geometrico seguente: date due terne di assi ortogonali aventi origine comune si può determinare una retta passante per l'origine intorno alla quale si può far ruotare una delle due terne in modo che gli assi della medesima vengano a coincidere cogli assi dell'altra. È evidente che in questo caso l'angolo θ è la misura di questa rotazione.

2.ª Supponendo che a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; rappresentino i coseni degli angoli che tre assi ortogonali fissi in un corpo rigido in movimento comprendono con tre assi fissi nello spazio, indicando con p, q, r le componenti della velocità angolare del corpo rispetto ai tre assi mobili si hanno come è noto le:

$$p = a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2'$$
$$q = a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3'$$
$$r = a_2 a_1' + b_2 b_1' + c_2 c_1'$$

nelle quali sostituendo per a_1, a_2 . . . i valori (85) si ottengono le seguenti :

$$hp = 2(\mu'\nu - \mu\nu' - \lambda') \qquad hq = 2(\nu'\lambda - \nu\lambda' - \mu') \qquad hr = 2(\lambda'\mu - \lambda\mu' - \nu')$$

dalle quali :

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}(r\mu - q\nu - p - \lambda m)$$

$$(86) \qquad \mu' = \tfrac{1}{2}(p\nu - r\lambda - q - \mu m)$$

$$\nu' = \tfrac{1}{2}(q\lambda - p\mu - r - \nu m)$$

posto per brevità :

$$\lambda p + \mu q + \nu r = m$$

Queste ultime equazioni ordinatamente moltiplicate per λ, μ, ν e sommate danno facilmente la :

$$h' + mh = 0$$

e moltiplicate per p, q, r e sommate la :

$$\omega^2 + m^2 = -2(\lambda' p + \mu' q + \nu' r)$$

essendo ω la velocità angolare del corpo.

Quando il corpo ruota intorno ad un punto fisso, e si suppongono i tre assi mobili col medesimo essere assi principali del corpo, indicando con A, B, C i momenti principali d' inerzia, e con T la semisomma delle forze vive si ha :

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2)$$

e posto :

$$u = \frac{d\mathrm{T}}{d\lambda'}, \qquad v = \frac{d\mathrm{T}}{d\mu'}, \qquad w = \frac{d\mathrm{T}}{d\nu'}$$

si hanno le :

$$-\tfrac{1}{2}hu = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q\nu - \mathrm{C}r\mu$$

$$(87) \qquad -\tfrac{1}{2}hv = -\mathrm{A}p\nu + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r\lambda$$

$$-\tfrac{1}{2}hw = \mathrm{A}p\mu - \mathrm{B}q\lambda + \mathrm{C}r$$

dalle quali :

$$2\mathrm{A}p = v\nu - w\mu - u - \lambda\sigma \qquad 2\mathrm{B}q = w\lambda - u\nu - v - \mu\sigma \qquad 2\mathrm{C}r = u\mu - v\lambda - w - \nu\sigma$$

essendo $\sigma = \lambda u + \mu v + \nu w$. Ora indicando con U la fonzione delle forze si hanno come è noto le :

$$u' = -\frac{d(T-U)}{d\lambda}, \quad v' = -\frac{d(T-U)}{d\mu}, \quad w' = -\frac{d(T-U)}{d\nu}$$

quindi si avranno le :

$$u' = \tfrac{1}{2}(p\sigma + um + rv - qw) + \frac{dU}{d\lambda}$$

$$v' = \tfrac{1}{2}(q\sigma + vm + pw - ru) + \frac{dU}{d\mu}$$

$$w' = \tfrac{1}{2}(r\sigma + wm + qu - pv) + \frac{dU}{d\nu}$$

Queste equazioni insieme alle (86) sono le equazioni alle derivate pel movimento di un corpo attorno ad un punto fisso sotto la forma assegnata dall' Hamilton.

Notiamo che se il corpo è sollecitato da sole forze istantanee, indicando con ξ, η, ζ gli angoli che l'asse della coppia acceleratrice, l' asse della coppia d' impulsione e l' asse istantaneo di rotazione fanno colla retta di cui si è detto alla fine dell'Applicazione 1.ª (la quale retta venne dal Sig. Cayley denominata asse risultante); e con g, l, ω i momenti della coppia acceleratrice e della coppia di impulsione, e la velocità angolare del corpo, ponendo :

$$Ap\lambda + Bq\mu + Cr\nu = \psi, \qquad Ap'\lambda + Bq'\mu + Cr'\nu = \varphi$$

si hanno le :

$$\varphi = g \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta . \cos\xi, \qquad \psi = l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta . \cos\eta, \qquad m = \omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta . \cos\zeta$$

e siccome moltiplicando le (87) ordinatamente per λ, μ, ν e sommando i risultati si ha :

$$h\sigma + 2\psi = 0$$

si avrà anche :

$$\sigma + l \operatorname{sen} \theta . \cos\eta = 0$$

L' utilità di queste formole nella trattazione del problema del movimento di un corpo sollecitato da forze istantanee attorno ad un punto fisso, si rende manifesta dai risultati ottenuti dal Sig. Cayley su questo argomento (*).

(*) The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Vol. 1. 1846.

Un determinante P gli elementi conjugati del quale soddisfino alla condizione :

$$a_{r,s} = a_{s,r}$$

si chiama determinante *simmetrico*.

Quindi una potenza d' ordine pari di un determinante qualunque è un determinante simmetrico. E siccome in un determinante simmetrico P gli elementi situati nella resima colonna eguagliano quelli costituenti la resima linea, si avrà :

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = \frac{dP}{da_{s,r}}$$

cioè il determinante ad elementi reciproci di un determinante simmetrico è pure simmetrico. Ne segue che i valori di $x_1, x_2 \ldots x_n$ ricavati dal sistema di equazioni algebriche lineari (16. §. 4.°) nel caso che $a_{r,s} = a_{s,r}$ assumeranno la forma :

$$Px_1 = u_1 \frac{dP}{da_{1,1}} + \tfrac{1}{2} u_2 \frac{dP}{da_{1,2}} + \ldots + \tfrac{1}{2} u_n \frac{dP}{da_{1,n}}$$

$$Px_2 = \tfrac{1}{2} u_1 \frac{dP}{da_{1,2}} + \quad u_2 \frac{dP}{da_{2,2}} + \ldots + \tfrac{1}{2} u_n \frac{dP}{da_{2,n}}$$

. . . .

$$Px_n = \tfrac{1}{2} u_1 \frac{dP}{da_{1,n}} + \tfrac{1}{2} u_2 \frac{dP}{da_{2,n}} + \ldots + u_n \frac{dP}{da_{n,n}}$$

rappresentando $\frac{dP}{da_{r,s}}$ la derivata rispetto ad $a_{r,s}$ dello sviluppo del determinante simmetrico P.

Dalla formola (14) pel caso di P determinante simmetrico si ha :

$$P \frac{d^2P}{da_{r,r}\, da_{s,s}} = \frac{dP}{da_{r,r}} \frac{dP}{da_{s,s}} - \left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2$$

e supponendo $\frac{dP}{da_{r,r}} = 0$ si ha :

$$P \frac{d^2P}{da_{r,r}\, da_{s,s}} = -\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2.$$

cioè i due determinanti simmetrici P e $\frac{d^2P}{da_{r,r}\, da_{s,s}}$ saranno di segno contrario.

Appartengono alla specie dei determinanti simmetrici anche i determinanti della forma :

$$H_{2n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

per i quali ha luogo la proprietà espressa dall' equazione :

$$\frac{dH_{2n-1}}{da_{2n-1}} = H_{2n-3}$$

La proprietà caratteristica di questi determinanti è però devoluta alla teorica degli *invarianti*.

Applicazione. Indicando con s_r la somma delle potenze erresime delle radici della equazione :

$$V(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1 x^{n-1} + x^n = 0$$

sussistono come è noto le relazioni :

$$a_n s_0 + a_{n-1} s_1 + \dots + a_1 s_{n-1} + s_n = 0$$
$$a_n s_1 + a_{n-1} s_2 + \dots + a_1 s_n + s_{n+1} = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n s_{n-1} + a_{n-1} s_n + \dots + a_1 s_{2n-2} + s_{2n-1} = 0$$

dalle quali e dalla $V(x) = 0$ eliminando i coefficienti $a_1, a_2 \dots a_n$ si ha :

$$V(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} = 0$$

Osserviamo che se agli elementi della seconda colonna di questo determinante si aggiungono ordinatamente quelli della prima moltiplicati per $-x$, agli elementi della terza colonna quelli della seconda moltiplicati per $-x$, e così di seguito, il valore del determinante non si altera, quindi si ha :

$$V(x) = \begin{vmatrix} s_1 - s_0 x & s_2 - s_1 x & \ldots\ldots & s_n - s_{n-1} x \\ s_2 - s_1 x & s_3 - s_2 x & \ldots\ldots & s_{n+1} - s_n x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n - s_{n-1} x & s_{n+1} - s_n x & \ldots\ldots & s_{2n-1} - s_{2n-2} x \end{vmatrix} = 0$$

Rappresentiamo questo determinante con :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ed indichiamo con V_r il determinante :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \ldots & a_{r,r} \end{vmatrix}$$

Ciò posto passiamo a dimostrare il seguente :

Teorema. I termini costituenti la serie :

$$V_n\,,\; V_{n-1}\,,\; V_{n-2} \ldots \; V_r \ldots \; V_1\,,\; 1$$

godono della proprietà caratteristica dei residui di Sturm, cioè se un valore di x annulla la funzione V_r le funzioni V_{r+1}, V_{r-1} sono per quel medesimo valore di x di segno contrario.

Infatti osserviamo che essendo :

$$V_r = \frac{d V_{r+1}}{d a_{r+1,r+1}} \qquad V_{r-1} = \frac{d^2 V_{r+1}}{d a_{r,r}\, d a_{r+1,r+1}}$$

si otterrà per l' equazione (14) :

$$V_{r+1}\, V_{r-1} = \frac{d V_{r+1}}{d a_{r,r}}\, V_r - \left(\frac{d V_{r+1}}{d a_{r,r+1}}\right)^2$$

Quindi se un valore di x rende $V_r = 0$, si avrà pel medesimo valore :

$$V_{r+1}\, V_{r-1} = - \left(\frac{d V_{r+1}}{d a_{r,r+1}}\right)^2$$

vale a dire V_{r+1} e V_{r-1} di segno contrario.

§. 9.° Dei determinanti delle radici delle equazioni algebriche e dei determinanti degli integrali particolari delle equazioni a derivate lineari.

Rappresenti :

$$x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$$

una equazione algebrica dell' ennesimo grado , e siano α_1, α_2, ... α_n le radici della medesima. Saranno soddisfatte identicamente le equazioni :

$$\alpha_1^n + A_{n-1}\alpha_1^{n-1} + \dots + A_1\alpha_1 + A_0 = 0$$
$$\alpha_2^n + A_{n-1}\alpha_2^{n-1} + \dots + A_1\alpha_2 + A_0 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_n^n + A_{n-1}\alpha_n^{n-1} + \dots + A_1\alpha_n + A_0 = 0$$

Moltiplicate queste equazioni ordinatamente per le indeterminate a_1, a_2 ... a_n e sommati i risultati si pongano :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= 0 \\ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ a_1\alpha_1^r + a_2\alpha_2^r + \dots + a_n\alpha_n^r &= z \\ \dots\dots\dots & \\ a_1\alpha_1^{n-1} + a_2\alpha_2^{n-1} + \dots + a_n\alpha_n^{n-1} &= 0 \end{aligned} \tag{88}$$

si avrà evidentemente :

$$A_r = -\frac{1}{z}\left(a_1\alpha_1^n + a_2\alpha_2^n + \dots + a_n\alpha_n^n\right)$$

Ora supposto :

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

dalle equazioni (88) si ricavano le :

$$a_1 = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^r}, \quad a_2 = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_2^r} \quad \dots \quad a_n = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_n^r}$$

e quindi sostituendo :

$$A_r = -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_1^n\frac{d\Delta}{d\alpha_1^r} + \alpha_2^n\frac{d\Delta}{d\alpha_2^r} + \dots + \alpha_n^n\frac{d\Delta}{d\alpha_n^r}\right) = \pm\Sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-r}$$

rappresentando col simbolo Σ la somma dei prodotti delle combinazioni ad $n-r$ ad $n-r$ delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$.

Se supponiamo $r = n-1$ ed indichiamo con $F(x)$ la espressione :

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

le equazioni (88) sono soddisfatte ponendo :

$$a_1 = \frac{z}{F'(\alpha_1)}, \quad a_2 = \frac{z}{F'(\alpha_2)}, \quad \dots \quad a_n = \frac{z}{F'(\alpha_n)}$$

e quindi :

$$\frac{1}{F'(\alpha_1)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^{n-1}}, \quad \frac{1}{F'(\alpha_2)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_2^{n-1}}, \quad \dots \quad \frac{1}{F'(\alpha_n)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_n^{n-1}}$$

Osserviamo che :

$$\frac{d\Delta}{d\alpha_1^{n-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

per cui indicando questo determinante con Δ_1 e con $F_1(x)$ la espressione :

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)$$

avremo :

$$\frac{1}{F_1'(\alpha_2)} = \frac{1}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha_2^{n-2}}$$

Analogamente ponendo :

$$\frac{d\Delta_1}{d\alpha_2^{n-2}} = \Delta_2, \quad \frac{d\Delta_2}{d\alpha_3^{n-3}} = \Delta_3 \dots \frac{d\Delta_{n-2}}{d\alpha_{n-1}} = \Delta_{n-1} = 1$$

ed :

$$F_2(x)=(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)\,,\ F_3(x)=(x-\alpha_4)\dots(x-\alpha_n)\dots F_{n-2}(x)=(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)$$

avremo :

$$\frac{1}{F_2'(\alpha_2)}=\frac{1}{\Delta_2}\,\frac{d\Delta_3}{d\alpha_2^{\,n-2}}\,,\ \frac{1}{F_3'(\alpha_3)}=\frac{1}{\Delta_3}\,\frac{d\Delta_4}{d\alpha_3^{\,n-3}}\dots\frac{1}{F'_{n-2}(\alpha_{n-1})}=\frac{1}{\Delta_{n-2}}$$

le quali equazioni moltiplicate membro per membro fra loro danno la :

$$\Delta=F'(\alpha_1)\,F_1'(\alpha_2)\,F_2'(\alpha_3)\dots F'_{n-2}(\alpha_{n-1})$$

ossia :

$$\Delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\dots(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_3)\dots(\alpha_2-\alpha_n)(\alpha_3-\alpha_4)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$$

importante relazione dovuta a Vandermonde.

A questo risultato si può anche giungere facendo uso di sole proprietà dei determinanti. Infatti eseguendo sul determinante Δ la trasformazione indicata all' Applicazione 3.ª del §. 5.° si ha :

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_2-\alpha_3 & \dots\dots & \alpha_{n-1}-\alpha_n \\ \alpha_1^2-\alpha_2^2 & \alpha_2^2-\alpha_3^2 & \dots\dots & \alpha_{n-1}^2-\alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1}-\alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-1}-\alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ossia dividendo la prima colonna per $\alpha_1-\alpha_2$; la seconda per $\alpha_2-\alpha_3$ ecc. si ha :

$$\Delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\begin{vmatrix} 1 & \dots\dots\dots & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \dots\dots\dots & \alpha_{n-1}+\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-2}+\alpha_1^{n-3}\alpha_2+\dots+\alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-2}+\alpha_{n-1}^{n-3}\alpha_n+\dots+\alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ed eseguendo di nuovo sopra quest' ultimo determinante la trasformazione suddetta, e quindi dividendo la prima colonna per $\alpha_1-\alpha_3$, la seconda per $\alpha_2-\alpha_4$ ecc. si ottiene :

$$\Delta=(\alpha_1-\alpha_2)\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)(\alpha_1-\alpha_3)\dots(\alpha_{n-2}-\alpha_n)\begin{vmatrix} 1 & \dots\dots\dots \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & \dots\dots\dots \\ \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-3}+\alpha_1^{n-4}\alpha_2+\dots+\alpha_3(\alpha_1^{n-4}+\dots)+\dots & \end{vmatrix}$$

e ripetendo questa operazione $(n-1)$ volte si giungerà al valore di Δ trovato sopra.

Da esso deducesi facilmente che i valori di $x_1, x_2 \ldots x_n$ ricavabili dalle equazioni:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = k$$
$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_n^2 x_n = k^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1^{n-1} x_1 + \alpha_2^{n-1} x_2 + \ldots + \alpha_n^{n-1} x_n = k^{n-1}$$

si potranno porre sotto la forma:

$$(89) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{(\alpha_2 - k)(\alpha_3 - k)\ldots(\alpha_n - k)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)\ldots(\alpha_n - \alpha_1)} \\ x_2 &= \frac{(\alpha_1 - k)(\alpha_3 - k)\ldots(\alpha_n - k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)\ldots(\alpha_n - \alpha_2)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{(\alpha_1 - k)(\alpha_2 - k)\ldots(\alpha_{n-1} - k)}{(\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_2 - \alpha_n)\ldots(\alpha_{n-1} - \alpha_n)} \end{aligned}$$

Si indichi con s_r la somma delle potenze $r$esime delle radici dell' equazione proposta, facendo il quadrato del determinante Δ si ottiene:

$$\Delta^2 = \text{II} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

e siccome per l' equazione (62) si ha:

$$^{(n-m)}\text{II}_{r,r} = \left({}^{(n-m)}\Delta_{r,1}\right)^2 + \left({}^{(n-m)}\Delta_{r,2}\right)^2 + \ldots + \left({}^{(n-m)}\Delta_{r,n}\right)^2$$

osservando essere:

$$^{(n-m)}\Delta_{u,u} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} \qquad ^{(n-m)}\text{II}_{u,u} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

avremo la :

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Sigma \left\{ (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) \dots (\alpha_1-\alpha_m)(\alpha_2-\alpha_3) \dots (\alpha_{m-1}-\alpha_m) \right\}^2$$

Applicazioni. 1.ª

Un determinante nel quale gli elementi costituenti una linea di una colonna sono integrali definiti estesi fra gli stessi limiti si può ridurre ad un integrale multiplo. In alcuni casi questa trasformazione o la reciproca, quando si possa eseguire, ponno essere utili nella ricerca del valore di quel determinante, o di quell' integrale multiplo. Per mostrare come possa effettuarsi questa trasformazione consideriamo il determinante :

$$\begin{vmatrix} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_2}}{\varphi_2(x_2)} dx_2 & \dots & \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} dx_n \\ \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_1} x_1}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_2} x_2}{\varphi_2(x_2)} dx_2 & \dots & \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_n} x_n}{\varphi_n(x_n)} dx_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_1} x_1^{n-1}}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_2} x_2^{n-1}}{\varphi_2(x_2)} dx_2 & \dots & \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_n} x_n^{n-1}}{\varphi_n(x_n)} dx_n \end{vmatrix}$$

ed osserviamo che ogni termine dello sviluppo del medesimo sarebbe un integrale definito multiplo dell' ennesimo ordine, per conseguenza quel determinante si potrà porre sotto la forma :

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \dots \int_{a_n}^{\infty} dx_n \begin{vmatrix} \frac{e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2}}{\varphi_2(x_2)} & \dots & \frac{e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} \\ \frac{e^{-x_1} x_1}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2} x_2}{\varphi_2(x_2)} & \dots & \frac{e^{-x_n} x_n}{\varphi_n(x_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{e^{-x_1} x_1^{n-1}}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2} x_2^{n-1}}{\varphi_2(x_2)} & \dots & \frac{e^{-x_n} x_n^{n-1}}{\varphi_n(x_n)} \end{vmatrix}$$

ossia il determinante stesso sarà eguale all' integrale multiplo :

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{\infty} dx_n \, \frac{e^{-x_1-x_2\ldots-x_n}}{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)} \, \Delta$$

essendo :

$$\Delta = (x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\ldots\ldots(x_{n-1}-x_n)$$

Mediante una di queste trasformazioni ed un teorema sugli integrali particolari delle equazioni alle derivate lineari dovuto al Sig. Liouville, (il qual teorema verrà dimostrato in seguito), il sig. Tissot (*) giunse recentemente a generalizzare alcuni risultati di Abel e di W. Roberts (**). I determinanti di integrali definiti erano però già stati considerati dal Sig. Catalan (***).

2.ª La funzione omogenea di grado dispari a due variabili :

$$a_1x^{2n+1}+(2n+1)a_2x^{2n}y+\frac{(2n+1)2n}{2}a_3x^{2n-1}y^2+\ldots+(2n+1)a_{2n+1}xy^{2n}+a_{2n+2}y^{2n+1}$$

si dirà ridotta alla forma *canonica* allorquando venga trasformata nella :

$$(p_1x+q_1y)^{2n+1}+(p_2x+q_2y)^{2n+1}+\ldots\ldots+(p_{n+1}x+q_{n+1}y)^{2n+1}.$$

Le $2(n+1)$ incognite $p_1, p_2 \ldots p_{n+1}; q_1, q_2, \ldots q_{n+1}$ verranno determinate col mezzo delle $2(n+1)$ equazioni le quali si ottengono dall'eguagliare i coefficienti delle medesime potenze della x nelle due espressioni. Posto $q_1=p_1\alpha_1$, $q_2=p_2\alpha_2 \ldots q_{n+1}=p_{n+1}\alpha_{n+1}$ e $p_r^{2n+1}=c_r$, quelle $2(n+1)$ equazioni saranno :

$$c_1+c_2+\ldots\ldots+c_{n+1}=a_1$$

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots\ldots+c_{n+1}\alpha_{n+1}=a_2$$

$$c_1\alpha_1^2+c_2\alpha_2^2+\ldots\ldots+c_{n+1}\alpha_{n+1}^2=a_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1\alpha_1^{2n+1}+c_2\alpha_2^{2n+1}+\ldots+c_{n+1}\alpha_{n+1}^{2n+1}=a_{2n+2}$$

(*) Journal de Liouville. Année 1852.

(**) Abel. Oeuvres complétes. pag. 93. Tome 1.° — Journal de Liouville. 1851, 1852.

(***) Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles. 1841.

Dalle prime $n+1$ fra queste equazioni ricavando i valori di $c_1, c_2 \dots c_{n+1}$ si otterranno $n+1$ equazioni analoghe alla:

$$c_r = a_1 \frac{d\Delta}{d\alpha_r^0} + a_2 \frac{d\Delta}{d\alpha_r} + \dots + a_{n+1} \frac{d\Delta}{d\alpha_r^n} \tag{90}$$

essendo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

e sostituiti questi valori nell' $(n+2)$esima equazione si otterrà:

$$a_{n+2} - a_{n+1}\Sigma\alpha_1 + a_n \Sigma\alpha_1\alpha_2 \dots \pm a_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1} = 0$$

rammentando che:

$$\alpha_1^{n+1}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^r} + \alpha_2^{n+1}\frac{d\Delta}{d\alpha_2^r} + \dots + \alpha_{n+1}^{n+1}\frac{d\Delta}{d\alpha_{n+1}^r} = \pm\Delta\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-r+1}$$

Analogamente eliminando $c_1\alpha_1$, $c_2\alpha_2 \dots c_{n+1}\alpha_{n+1}$ dalla 2ª, 3ª ... $(n+3)$esima di quelle equazioni si avrà:

$$a_{n+3} - a_{n+2}\Sigma\alpha_1 + a_{n+1}\Sigma\alpha_1\alpha_2 \dots \pm a_2\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1} = 0$$

Continuando ad operare in questo modo, si otterranno evidentemente le $n+1$ equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} & a_{n+2} - a_{n+1}m_1 + a_n m_2 \dots \pm a_1 m_{n+1} = 0 \\ & a_{n+3} - a_{n+2}m_1 + a_{n+1}m_2 \dots \pm a_2 m_{n+1} = 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & a_{2n+2} - a_{2n+1}m_1 + a_{2n}m_2 \dots \pm a_{n+1}m_{n+1} = 0 \end{aligned} \tag{91}$$

nelle quali:

$$m_1 = \Sigma\alpha_1\,,\; m_2 = \Sigma\alpha_1\alpha_2 \dots m_{n+1} = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1}$$

Osserviamo che le $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}$ saranno le radici della equazione:

$$x^{n+1} - x^n m_1 + x^{n-1} m_2 \dots \pm m_{n+1} = 0$$

ossia le radici della :

$$(92)\qquad \begin{vmatrix} x^{n+1} & x^n & \dots & x & 1 \\ a_{n+2} & a_{n+1} & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n+2} & a_{2n+1} & \dots & a_{n+2} & a_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

la quale si ottiene eliminando le $m_1, m_2 \dots m_{n+1}$ da qoest' ultima e dalle (91). Mediante la risoluzione di questa equazione si avranno i valori di $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}$, quindi per mezzo delle (90) quelli di $c_1, c_2 \dots c_{n+1}$; dai qoali si deducono i valori richiesti di $p_1, p_2 \dots p_{n+1}$, $q_1, q_2 \dots q_{n+1}$. Notiamo che la equazione (92) mediante uoa trasformazione della quale si è già fatto uso si può ridurre alla :

$$\begin{vmatrix} a_1 x - a_2 & a_2 x - a_3 & \dots & a_{n+1} x - a_{n+2} \\ a_2 x - a_3 & a_3 x - a_4 & \dots & a_{n+2} x - a_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} x - a_{n+2} & a_{n+2} x - a_{n+3} & \dots & a_{2n+1} x - a_{2n+2} \end{vmatrix} = 0$$

Consideriamo la equazione alle derivate lineari dell' ennesimo ordine :

$$y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0$$

nella quale A_{n-1}, $A_{n-2} \dots A_0$, sieno funzioni della variabile rispetto alla quale sono prese le derivate. Sieno $y_1, y_2 \dots y_n$ n integrali particolari di quell' equazione ; e ponendo :

$$\begin{aligned} a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n &= 0 \\ a_1 y_1' + a_2 y_2' + \dots + a_n y_n' &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 y_1^{(r)} + a_2 y_2^{(r)} + \dots + a_n y_n^{(r)} &= z \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-1)} + \dots + a_n y_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned}$$

si avrà :

$$A_r = -\frac{1}{z}\left(a_1 y_1^{(n)} + a_2 y_2^{(n)} + \dots + a_n y_n^{(n)}\right)$$

ossia ricavando dalle equazioni soperiori i valori di $a_1, a_2 \dots a_n$ e sostituendoli in quest' ultima si ottiene :

$$A_r = -\frac{1}{\Delta}\left(y_1^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_1^{(r)}} + y_2^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_2^{(r)}} + \ldots + y_n^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_n^{(r)}}\right)$$

essendo :

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Si osservi che derivando quest' ultima equazione si ha :

$$(93) \qquad \Delta' = y_1^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} + y_2^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} + \ldots + y_n^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

quindi sarà :

$$A_{n-1} = -\frac{\Delta'}{\Delta}$$

dalla quale :

$$\Delta = Ce^{-\int A_{n-1}dx}$$

formola dovuta al Sig. Liouville.

Mediante la equazione (93) si ottengono facilmente le seguenti :

$$\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)', \quad \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' \ldots \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'$$

e quindi le :

$$-\Delta = y_1^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' + y_2^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' + \ldots + y_n^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'$$

$$-\Delta' = y_1^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)'' + y_2^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)'' + \ldots + y_n^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)''$$

$$0 = y_1^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' + y_2^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' + \ldots + y_n^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'$$

nell' ultima delle quali la r può assumere i valori $3, 4, \ldots n$. Ne deriva che supponendo $\Delta = 0$ si hanno $n-1$ equazioni dalle quali si ricavano le proporzioni :

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' : \left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' : \ldots : \left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)' = \frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} : \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} : \ldots : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

e quindi :

$$\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} : \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} : \ldots : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} = \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ costanti. Questi valori sostituiti nell' equazione identica :

$$y_1 \frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} + y_2 \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} + \ldots + y_n \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} = n$$

danno la :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$$

Per l' equazione (93) si hanno anche le seguenti :

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-2)}}\right)' = -\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-3)}} + \frac{d\Delta'}{dy_r^{(n-2)}},\ \left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-3)}}\right)' = -\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-4)}} + \frac{d\Delta'}{dy_r^{(n-3)}} \ldots \left(\frac{d\Delta}{dy_r}\right)' = \frac{d\Delta'}{dy_r}$$

Derivando la penultima una volta, la terz' ultima due volte, e così di seguito si giunge alla :

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(s)}}\right)^{(s+1)} = (-1)^s \left\{ \frac{d\Delta'}{dy_r} - \left(\frac{d\Delta'}{dy_r'}\right)' + \left(\frac{d\Delta'}{dy_r''}\right)'' \ldots \pm \left(\frac{d\Delta'}{dy_r^{(s)}}\right)^{(s)} \right\}$$

Applicazioni. 1.ª

L' equazione :

$$\Delta = Ce^{-\int A_{n-1} dx}$$

può scriversi sotto la forma :

$$y_n^{(n-1)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} + y_n^{(n-2)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-2)}} + \ldots + y_n \frac{d\Delta}{dy_n} = Ce^{-\int A_{n-1} dx}$$

ossia ponendo :

$$B_r = \frac{d\Delta}{dy_n^{(r)}} : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

si avrà :

$$(94) \qquad y_n^{(n-1)} + B_{n-2} y_n^{(n-2)} + \ldots + B_0 y_n = Ce^{-\int A_{n-1} dx} : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

Osserviamo che per le relazioni stabilite fra i coefficienti di una equazione alle derivate lineari, e gli integrali particolari della medesima ; le espressioni $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$

sono integrali particolari dell' equazione :

$$y_n^{(n-1)} + B_{n-2}\, y_n^{(n-2)} + \ldots + B_1 y'_n + B_2 y_n = 0$$

e qoindi per una nota proprietà delle eqoazioni alle derivate lineari, l' integrale completo dell' equaziooe (94) sarà :

$$y_n = y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 + \ldots + y_{n-1} \alpha_{n-1}$$

essendo :

$$\alpha_r = C \int \frac{1}{\Delta_1^2} \frac{d\Delta_1}{dy_r^{(n-2)}} e^{-\int A_{n-1} dx} dx \,, \quad \Delta_1 = \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

Qoindi conosciuti $n-1$ integrali particolari di uoa eqoazione alle derivate lioeari dell' ennesimo ordine, si potrà determinare l' ennesimo in funzione di essi. Questo importaote teorema è dovuto al Sig. Malmstén (*).

2.° Denomioando con x, y, z le coordinate di on punto di una linea a doppia curvatura, con r, ρ i raggi di curvatura e di torsione, e ponendo per brevità:

$$m^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \\ x^{\text{iv}} & y^{\text{iv}} & z^{\text{iv}} \end{vmatrix}$$

si ha :

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{m^2}\left(x' \frac{d\Delta}{dx^{\text{iv}}} + y' \frac{d\Delta}{dy^{\text{iv}}} + z' \frac{d\Delta}{dz^{\text{iv}}} \right)$$

supposto che le derivate sieno prese rispetto all' arco. Per determinare la lioea per la quale il rapporto $\frac{r}{\rho}$ è costante, si derivi quest' ultima equazione e si avrà :

$$(95) \qquad m\left(x' \frac{d\Delta}{dx'''} + y' \frac{d\Delta}{dy'''} + z' \frac{d\Delta}{dz'''} \right) + 3m'\left(x' \frac{d\Delta}{dx^{\text{iv}}} + y' \frac{d\Delta}{dy^{\text{iv}}} + z' \frac{d\Delta}{dz^{\text{iv}}} \right) = 0$$

Ma dalle equazioni :

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

$$x'x''' + y'y''' + z'z''' = -m^2$$

$$x'x^{\text{iv}} + y'y^{\text{iv}} + z'z^{\text{iv}} = -3mm'$$

(*) Crelle Journal für die Mathematik. Band. 39.

si hanno le:

$$\Delta x' = -m\left(m\frac{d\Delta}{dx'''} + 3m'\frac{d\Delta}{dx^{\text{IV}}}\right),\ \Delta y' = -m\left(m\frac{d\Delta}{dy'''} + 3m'\frac{d\Delta}{dy^{\text{IV}}}\right),\ \Delta z' = -m\left(m\frac{d\Delta}{dz'''} + 3m'\frac{d\Delta}{dz^{\text{IV}}}\right)$$

le quali moltiplicate ordinatamente per x', y', z' e sommate danno per la (95):

$$\Delta = 0$$

e quindi:

$$ax' + by' + cz' = k$$

essendo a, b, c, k quantità costanti. La linea richiesta sarà dunque un elice tracciata sopra un cilindro di cui le generatrici sono parallele ad una retta determinata (*).

§. 10.° Dei determinanti delle funzioni.

Rappresentino $y_1, y_2 \ldots y_n$ n funzioni fra loro indipendenti delle variabili x_1, $x_2 \ldots x_n$; formando le derivate prime parziali di quelle funzioni rispetto a ciascuna delle variabili si ottengono n^2 quantità analoghe alla $\frac{dy_r}{dx_s} = y_r'(x_s)$. Il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} y_1'(x_1) & y_1'(x_2) & \ldots & y_1'(x_n) \\ y_2'(x_1) & y_2'(x_2) & \ldots & y_2'(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n'(x_1) & y_n'(x_2) & \ldots & y_n'(x_n) \end{vmatrix} = \Sigma\left(\pm y_1'(x_1) y_2'(x_2) \ldots y_n'(x_n)\right)$$

chiamasi determinante *funzionale*, o determinante delle derivate prime parziali delle funzioni $y_1, y_2 \ldots y_n$ rispetto alle variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$.

L' ordine del determinante funzionale è eguale al numero delle funzioni, e non è minore che allorquando alcune funzioni sieno eguali ad alcune variabili. Per esempio se fossero:

$$y_{r+1} = x_{r+1},\ y_{r+2} = x_{r+2} \ldots\ y_n = x_n$$

il determinante si ridurrebbe al:

$$\Sigma\left(\pm y_1'(x_1) y_2'(x_2) \ldots y_r'(x_r)\right)$$

e quindi sarebbe dell' $r$esimo ordine.

(*) Monge. Application de l'Analyse a la Géométrie, Cinquième edition. Note 1.

Se dalle equazioni :

$$y_1(x_1, x_2, \dots x_n)=y_1 \,,\; y_2(x_1, x_2 \dots x_n)=y_2 \;\dots\; y_n(x_1, x_2 \dots x_n)=y_n$$

si ricavano i valori di $x_1, x_2 \dots x_n$ e questi valori si sostituiscono nelle equazioni medesime, si ottengono mediante la derivazione le seguenti :

$$(96) \qquad \begin{aligned} & y_r'(x_1)x_1'(y_r) + y_r'(x_2)x_2'(y_r) + \dots + y_r'(x_n)x_n'(y_r) = 1 \\ & y_r'(x_1)x_1'(y_s) + y_r'(x_2)x_2'(y_s) + \dots + y_r'(x_n)x_n'(y_s) = 0 \end{aligned}$$

e se nel valore trovato per x_r si sostituiscono alle $y_1, y_2 \dots y_n$ i loro valori, si avranno le equazioni :

$$(97) \qquad \begin{aligned} & y_1'(x_r)x_r'(y_1) + y_2'(x_r)x_r'(y_2) + \dots + y_n'(x_r)x_r'(y_n) = 1 \\ & y_1'(x_s)x_r'(y_1) + y_2'(x_s)x_r'(y_2) + \dots + y_n'(x_s)x_r'(y_n) = 0 \end{aligned}$$

Quindi indicando con Q il determinante :

$$\Sigma\left(\pm x_1'(y_1)\, x_2'(y_2) \dots x_n'(y_n)\right)$$

si avrà dalla nota regola per la moltiplicazione dei determinanti :

$$PQ = 1$$

Se nella seconda delle equazioni (96) si pone $s = 1, 2 \dots n$ si ottengono n equazioni dalle quali si ricava :

$$(98) \qquad Q y_r'(x_s) = \frac{dQ}{dx_s'(y_r)}$$

ed analogamente dalle (97) ricavasi la :

$$(99) \qquad P x_r'(y_s) = \frac{dP}{dy_s'(x_r)} = \alpha_{s,r}$$

e quindi :

$$x_r'(y_s) y_r'(x_s) = \frac{dP}{dy_s'(x_r)} \frac{dQ}{dx_s'(y_r)}$$

Rappresentando con S il determinante ad elementi reciproci del determinante P, osservando che dall'equazione (48) ponendo $i = 0$, $r = s$ ed $r + c = n + 1$ si ottiene la :

$$S_{n+1, n+1} = P_{n,n} P^{i-1}$$

ossia la :

$$\Sigma\left(\pm y_r'(x_r)\, y'_{r+1}(x_{r+1}) \ldots y_n'(x_n)\right) P^{r-1} = \Sigma\left(\pm \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{r-1,r-1}\right)$$

per l' equazione (99) si avrà :

$$\Sigma\left(\pm y_r'(x_r)\, y'_{r+1}(x_{r+1}) \ldots y_n'(x_n)\right) = \mathrm{P}\, \Sigma\left(\pm x_1'(y_1)\, x_2'(y_2) \ldots x'_{r-1}(y_{r-1})\right)$$

ed analogamente :

$$\Sigma\left(\mp x_r'(y_r)\, x'_{r+1}(y_{r+1}) \ldots x_n'(y_n)\right) = \mathrm{Q}\, \Sigma\left(\pm y_1'(x_1)\, y_2'(x_2) \ldots y'_{r-1}(x_{r-1})\right)$$

Derivando il determinante Q rispetto ad y_s si ha :

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dy_s} = \Sigma_r\, \Sigma_m \frac{d\mathrm{Q}}{dx_r'(y_m)} \, \frac{d^2 x_r}{dy_m\, dy_s}$$

ossia per l' equazione (98) :

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dy_s} = \mathrm{Q}\, \Sigma_r\, \Sigma_m \frac{d^2 x_r}{dy_m\, dy_s}\, y'_m(x_r)$$

od anche :

$$(100) \qquad \frac{d\mathrm{Q}}{dy_s} = \mathrm{Q}\, \Sigma_r \frac{d\, x_r'(y_s)}{dx_r}$$

e siccome $\mathrm{PQ} = 1$ si avrà :

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy_s} + \mathrm{P}\, \Sigma_r \frac{dx_r'(y_s)}{dx_r} = 0$$

Ma :

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy_s} = \Sigma_r \frac{d\mathrm{P}}{dx_r}\, x_r'(y_s)$$

quindi sostituendo si ottiene la :

$$\Sigma_r \frac{d\mathrm{P}\, x_r'(y_s)}{dx_r} = 0$$

la quale per l' equazione (99) può scriversi :

$$(101) \qquad \frac{d\alpha_{s,1}}{dx_1} + \frac{d\alpha_{s,2}}{dx_2} + \ldots + \frac{d\alpha_{s,n}}{dx_n} = 0$$

Notiamo che essendo :

$$P = \alpha_{s,1}\, y_s'(x_1) + \alpha_{s,2}\, y_s'(x_2) + \ldots\ldots + \alpha_{s,n}\, y_s'(x_n)$$

si avrà anche per l' equazione superiore :

$$P = \frac{d\alpha_{s,1}\, y_s}{dx_1} + \frac{d\alpha_{s,2}\, y_s}{dx_2} + \ldots\ldots + \frac{d\alpha_{s,n}\, y_s}{dx_n}.$$

Supponiamo che fra le variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$ e le funzioni $y_1, y_2 \ldots y_n$ sossistano le equazioni :

$$\varphi_1 = 0\,, \quad \varphi_2 = 0\,, \ \ldots\ldots\ \varphi_n = 0$$

Se da qoeste si ricavano i valori di $y_1, y_2 \ldots y_n$; e si sostituiscono i valori ottenuti nelle equazioni medesime, esse verranno soddisfatte, e quindi si avrà :

$$\frac{d\varphi_r}{dy_1}\, y_1'(x_r) + \frac{d\varphi_r}{dy_2}\, y_2'(x_r) + \ldots + \frac{d\varphi_r}{dy_n}\, y_n'(x_r) = -\frac{d\varphi_r}{dx_r}$$

e quindi per la regola della moltiplicazione si avrà :

$$(102) \qquad P\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\,\frac{d\varphi_2}{dy_2} \cdots\cdots \frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = (-1)^n\, \Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2} \cdots \frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

Applicazione.

Rappresentino $A_1, A_2 \ldots A_n$ n funzioni delle variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$ e si consideri la equazione alle derivate parziali lineari del primo ordine :

$$(103) \qquad A_1 y_r'(x_1) + A_2 y_r'(x_2) + \ldots + A_n y_r'(x_n) = 0$$

Sieno $y_1, y_2 \ldots y_{r-1}, y_{r+1} \ldots y_n$, $n-1$ soluzioni indipendenti fra loro di questa equazione; si otterranno mediante la sostituzione $n-1$ equazioni identiche dalle quali si hanno le proporzioni :

$$A_1 : A_2 : \ldots\ldots : A_n = \alpha_{r,1} : \alpha_{r,2} : \ldots\ldots : \alpha_{r,n}$$

Indichiamo con M il valore comune a questi rapporti, sarà evidentemente :

$$P = M\left(A_1 y_r'(x_1) + A_2 y_r'(x_2) + \ldots + A_n y_r'(x_n)\right)$$

e per l' equazione (101) si avrà :

$$(104) \qquad \frac{dMA_1}{dx_1} + \frac{dMA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMA_n}{dx_n} = 0$$

La quantità M per la quale hanno luogo le due proprietà espresse in queste due ultime equazioni venne dal Sig. Jacobi (*) denominata il *moltiplicatore* dell'equazione a derivate parziali (103), o del sistema di equazioni a derivate ordinarie:

$$(105) \qquad x_1' : x_2' : \ldots : x_n' = A_1 : A_2 : \ldots : A_n$$

Supponiamo ora che :

$$(106) \qquad \begin{aligned} B_1 &= A_1 y_1'(x_1) + A_2 y_1'(x_2) + \ldots + A_n y_1'(x_n) \\ B_2 &= A_1 y_2'(x_1) + A_2 y_2'(x_2) + \ldots + A_n y_2'(x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n &= A_1 y'_n(x_1) + A_2 y'_n(x_2) + \ldots + A_n y'_n(x_n) \end{aligned}$$

nelle quali $B_1, B_2 \ldots B_n$ sieno funzioni di $y_1, y_2 \ldots y_n$. Derivando queste equazioni ordinatamente per $y_1, y_2 \ldots y_n$, e sommando i risultati, rammentando essere :

$$\Sigma_r \frac{dy'_r(x_s)}{dy_r} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dx_s}$$

si ha :

$$\Sigma_r \frac{dB_r}{dy_r} = \frac{1}{P}\left(A_1 \frac{dP}{dx_1} + A_2 \frac{dP}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{dP}{dx_n}\right) + \frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n}$$

e siccome essendo $PQ = 1$ si ha :

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dx_r} = -\frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx_r}$$

si avrà anche :

$$Q \, \Sigma_r \frac{dB_r}{dy_r} = -\left(A_1 \frac{dQ}{dx_1} + A_2 \frac{dQ}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{dQ}{dx_n}\right) + Q\left(\frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n}\right)$$

Ora per le equazioni (106) si ha qualunque sia M la :

$$B_1 \frac{dMQ}{dy_1} + B_2 \frac{dMQ}{dy_2} + \ldots + B_n \frac{dMQ}{dy_n} = A_1 \frac{dMQ}{dx_1} + A_2 \frac{dMQ}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{dMQ}{dx_n}$$

(*) Mathematische Werke. Band. 1.

quindi moltiplicando la penultima equazione per M e sommandola con quest'ultima membro per membro si ottiene:

$$(107)\quad \frac{dMQB_1}{dy_1}+\frac{dMQB_2}{dy_2}+\ldots+\frac{dMQB_n}{dy_n}=Q\left(\frac{dMA_1}{dx_1}+\frac{dMA_2}{dx_2}+\ldots+\frac{dMA_n}{dx_n}\right)$$

Osserviamo che essendo:

$$y_r'=y_r'(x_1)x_1'+y_r'(x_2)x_2'+\ldots+y_r'(x_n)x_n'$$

dal sistema di equazioni (105) si deduce l' equivalente sistema:

$$y_1':y_2':\ldots:y_n'=B_1:B_2:\ldots:B_n$$

Se le:

$$y_1=a_1,\ y_2=a_2\ \ldots\ y_{n-2}=a_{n-2}$$

sono n-2 integrali del sistema (105) saranno identicamente nulle le $B_1, B_2 \ldots B_{n-2}$, e dall' equazione (107) si avrà:

$$\frac{dMQB_{n-1}}{dy_{n-1}}+\frac{dMQB_n}{dy_n}=Q\left(\frac{dMA_1}{dx_1}+\frac{dMA_2}{dx_2}+\ldots+\frac{dMA_n}{dx_n}\right)$$

Supponiamo che il moltiplicatore M sia determinato in modo da rendere:

$$(108)\quad \frac{dMA_1}{dx_1}+\frac{dMA_2}{dx_2}+\ldots+\frac{dMA_n}{dx_n}=0$$

si avrà per questo valore di M:

$$\frac{dMQB_{n-1}}{dy_{n-1}}+\frac{dMQB_n}{dy_n}=0$$

cioè MQ sarà, come è noto, il moltiplicatore opportuno per l' integrazione dell' equazione:

$$B_n y'_{n-1}-B_{n-1}y'_n=0$$

e quindi:

$$\int MQ(B_n y'_{n-1}-B_{n-1}y'_n)=\text{cost.}^e$$

sarà l' ultimo integrale delle equazioni (105).

Ne risulta che conoscinti $n-2$ integrali delle $n-1$ equazioni (105), e conosciuto un valore di M che soddisfi la (108), l'ultimo integrale delle equazioni medesime dipende da una quadratura. Questa proprietà trovata dal Sig. Jacobi venne dal medesimo autore denominata *principio dell' ultimo moltiplicatore*.

Vediamo ora come possa determinarsi il valore di M nel sistema di equazioni corrispondente ai problemi della Dinamica.

Indicando con T la semisomma delle forze vive, con U la funzione delle forze, le equazioni della dinamica come è noto si ponno porre sotto la forma:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{d(\mathrm{T-U})}{dp_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{d(\mathrm{T-U})}{dq_r}$$

nelle quali facciasi $r=1, 2 \ldots n$. Ponendo:

$$\frac{d(\mathrm{T-U})}{dp_r} = \mathrm{P}_r \quad \frac{d(\mathrm{U-T})}{dq_r} = \mathrm{Q}_r$$

quelle equazioni equivalgono alle:

$$t':q_1':q_2':\ldots:q_n':p_1':p_2':\ldots:p_n' = 1:\mathrm{P}_1:\mathrm{P}_2:\ldots:\mathrm{P}_n:\mathrm{Q}_1:\mathrm{Q}_2:\ldots:\mathrm{Q}_n$$

Quindi la equazione analoga alla (108) per la quale viene determinato il moltiplicatore M corrispondente a questo sistema di equazioni sarà la:

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \frac{d\mathrm{MP}_1}{dq_1} + \ldots + \frac{d\mathrm{MP}_n}{dq_n} + \frac{d\mathrm{MQ}_1}{dp_1} + \ldots + \frac{d\mathrm{MQ}_n}{dp_n} = 0$$

la quale, essendo evidentemente:

$$\frac{d\mathrm{P}_r}{dq_r} + \frac{d\mathrm{Q}_r}{dp_r} = 0$$

trasformasi nella:

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \mathrm{P}_1\frac{d\mathrm{M}}{dq_1} + \ldots + \mathrm{P}_n\frac{d\mathrm{M}}{dq_n} + \mathrm{Q}_1\frac{d\mathrm{M}}{dp_1} + \ldots + \mathrm{Q}_n\frac{d\mathrm{M}}{dp_n} = 0$$

Questa equazione essendo soddisfatta dal supporre M costante o per maggior semplicità $\mathrm{M}=1$, ne risulta che il moltiplicatore per le equazioni della dinamica poste sotto la forma superiore è l'unità.

Moltiplicando ordinatamente le equazioni :

$$
\begin{aligned}
y_1'(x_1)u_1 + y_1'(x_2)u_2 + \dots + y_1'(x_n)u_n &= v_1 \\
y_2'(x_1)u_1 + y_2'(x_2)u_2 + \dots + y_2'(x_n)u_n &= v_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n'(x_1)u_1 + y_n'(x_2)u_2 + \dots + y_n'(x_n)u_n &= v_n
\end{aligned}
$$

per $x_r'(y_1)$, $x_r'(y_2) \dots x_r'(y_n)$ si otterrà per le equazioni (97) la

$$u_r = v_1 x_r'(y_1) + v_2 x_r'(y_2) + \dots + v_n x_r'(y_n)$$

ed analogamente moltiplicando le equazioni :

$$
\begin{aligned}
y_1'(x_1)u_1 + y_2'(x_1)u_2 + \dots + y_n'(x_1)u_n &= v_1 \\
y_1'(x_2)u_1 + y_2'(x_2)u_2 + \dots + y_n'(x_2)u_n &= v_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_1'(x_n)u_1 + y_2'(x_n)u_2 + \dots + y_n'(x_n)u_n &= v_n
\end{aligned}
$$

per $x_1'(y_r)$, $x_2'(y_r) \dots x_n'(y_r)$ si avrà per le (96) la :

$$u_r = v_1 x_1'(y_r) + v_2 x_2'(y_r) + \dots + v_n x_n'(y_r)$$

Poniamo :

$$
(109) \quad
\begin{aligned}
y_r'(x_1)\, y_s'(x_1) + y_r'(x_2)\, y_s'(x_2) + \dots + y_r'(x_n)\, y_s'(x_n) &= A_{r,s} = A_{s,r} \\
x_1'(y_r)\, x_1'(y_s) + x_2'(y_r)\, x_2'(y_s) + \dots + x_n'(y_r)\, x_n'(y_s) &= E_{r,s} = E_{s,r}
\end{aligned}
$$

e sostituendo in quest' ultima equazione $1, 2, 3 \dots n$ in luogo di s si otterranno n equazioni dalle quali ricavando i valori di $x_1'(y_r)$, $x_2'(y_r) \dots x_n'(y_r)$ per quanto si è dimostrato sopra si avranno le :

$$
\begin{aligned}
x_1'(y_r) &= E_{r,1}\, y_1'(x_1) + E_{r,2}\, y_2'(x_1) + \dots + E_{r,n}\, y_n'(x_1) \\
x_2'(y_r) &= E_{r,1}\, y_1'(x_2) + E_{r,2}\, y_2'(x_2) + \dots + E_{r,n}\, y_n'(x_2) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n'(y_r) &= E_{r,1}\, y_1'(x_n) + E_{r,2}\, y_2'(x_n) + \dots + E_{r,n}\, y_n'(x_n)
\end{aligned}
$$

Moltiplicando queste equazioni ordinatamente per $y_r'(x_1)$, $y_r'(x_2) \dots y_r(x_n)$ o per $y_s'(x_1)$, $y_s'(x_2) \dots y_s'(x_n)$ si otterranno avendo riguardo alle (96), (109) le due

seguenti :

$$E_{r,1} A_{r,1} + E_{r,2} A_{r,2} + \ldots + E_{r,n} A_{r,n} = 1$$
$$E_{r,1} A_{s,1} + E_{r,2} A_{s,2} + \ldots + E_{r,n} A_{s,n} = 0$$

dalle quali ponendo :

$$P^n = K = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad Q^n = H = \begin{vmatrix} E_{1,1} & E_{1,2} & \ldots & E_{1,n} \\ E_{2,1} & E_{2,2} & \ldots & E_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{n,1} & E_{n,2} & \ldots & E_{n,n} \end{vmatrix}$$

si hanno le :

$$(110) \qquad KH = 1, \quad A_{r,s} = \frac{1}{H} \frac{dH}{dE_{r,s}}, \quad E_{r,s} = \frac{1}{K} \frac{dK}{dA_{r,s}}$$

Applicazione.

Si indichi con F una funzione delle funzioni fra loro indipendenti $y_1, y_2 \ldots y_n$ e pongasi per brevità :

$$F'(x_r) = X_r, \qquad F'(y_r) = Y_r ;$$

si avranno evidentemente le :

$$X_1 = Y_1 y_1'(x_1) + Y_2 y_2'(x_1) + \ldots + Y_n y_n'(x_1)$$
$$X_2 = Y_1 y_1'(x_2) + Y_2 y_2'(x_2) + \ldots + Y_n y_n'(x_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = Y_1 y_1'(x_n) + Y_2 y_2'(x_n) + \ldots + Y_n y_n'(x_n)$$

Moltiplicando queste equazioni ordinatamente per $y_r'(x_1)$, $y_r'(x_2) \ldots y_r'(x_n)$ e sommando i risultati si ottiene :

$$(111) \qquad X_1 y_r'(x_1) + X_2 y_r'(x_2) + \ldots + X_n y_r'(x_n) = L_r$$

essendo in causa delle equazioni (109) :

$$L_r = Y_1 A_{r,1} + Y_2 A_{r,2} + \ldots + Y_n A_{r,n}$$

ossia per la seconda delle (110) :

$$(112) \qquad HL_r = Y_1 \frac{dH}{dE_{r,1}} + Y_2 \frac{dH}{dE_{r,2}} + \ldots + Y_n \frac{dH}{dE_{r,n}}$$

Se nella equazione (111), si fà $r=1, 2 \ldots n$ si ottengono n equazioni dalle quali si ricavano le:

$$
(113) \quad
\begin{aligned}
X_1 &= L_1 x_1'(y_1) + L_2 x_1'(y_2) + \ldots + L_n x_1'(y_n) \\
X_2 &= L_1 x_2'(y_1) + L_2 x_2'(y_2) + \ldots + L_n x_2'(y_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_n &= L_1 x_n'(y_1) + L_2 x_n'(y_2) + \ldots + L_n x_n'(y_n)
\end{aligned}
$$

e dalla equazione (112) si deduce facilmente la:

$$L_1 E_{r,1} + L_2 E_{r,2} + \ldots + L_n E_{r,n} = Y_r.$$

Derivando le equazioni (113) ordinatamente rispetto ad $x_1, x_2 \ldots x_n$ e sommando i risultati si ottiene la:

$$\Sigma_r \frac{dX_r}{dx_r} = \frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dL_n}{dy_n} + L_1 \Sigma_r \frac{dx_r'(y_1)}{dx_r} + L_2 \Sigma_r \frac{dx_r'(y_2)}{dx_r} + \ldots + L_n \Sigma_r \frac{dx_r'(y_n)}{dx_r}$$

ossia per la (100):

$$(114) \qquad Q\left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right) = \frac{dL_1 Q}{dy_1} + \frac{dL_2 Q}{dy_2} + \ldots + \frac{dL_n Q}{dy_n};$$

la quale equazione rammentando essere $PQ=1$ può anche assumere la forma:

$$P\,\Sigma_r \frac{dX_r}{dx_r} = P\left(\frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dL_n}{dy_n}\right) - \left(L_1 \frac{dP}{dy_1} + L_2 \frac{dP}{dy_2} + \ldots + L_n \frac{dP}{dy_n}\right)$$

e siccome moltiplicando le (113) per $\frac{dP}{dx_1}, \frac{dP}{dx_2} \ldots \frac{dP}{dx_n}$ e sommando i risultati si ha:

$$X_1 \frac{dP}{dx_1} + X_2 \frac{dP}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dP}{dx_n} = L_1 \frac{dP}{dy_1} + L_2 \frac{dP}{dy_2} + \ldots + L_n \frac{dP}{dy_n}$$

sostituendo avremo:

$$P\left(\frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dL_n}{dy_n}\right) = \frac{dX_1 P}{dx_1} + \frac{dX_2 P}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n P}{dx_n}$$

Mediante la equazione (114) si ottiene una trasformazione generale della equazione alle derivate parziali del secondo ordine ad $n+1$ variabili :

$$\frac{d^2 F}{d x_1^2} + \frac{d^2 F}{d x_2^2} + \ldots + \frac{d^2 F}{d x_n^2} = 0$$

la quale trasformazione pel caso di $n=3$ corrisponde a quella trovata da Jacobi col mezzo del calcolo delle variazioni (*), e comprende quindi come casi particolari quelle dovute a Laplace, a Lamé ed a Cauchy (**). Se supponiamo $E_{r,s}=0$ si ha :

$$Q = \sqrt{(E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{n,n})}\,, \quad H L_r = Y_r \frac{dH}{dE_{r,r}}$$

e quindi :

$$L_r Q = \frac{\sqrt{(E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{r-1,r-1} E_{r+1,r+1} \ldots E_{n,n})}}{\sqrt{E_{r,r}}} \frac{dF}{dy_r}$$

Sieno :

$$x_1 = y_1 \cos y_2\,,\; x_2 = y_1 \operatorname{sen} y_2 \cos y_3\,,\; x_3 = y_1 \operatorname{sen} y_2 \operatorname{sen} y_3 \cos y_4 \ldots .$$

$$x_{n-1} = y_1 \operatorname{sen} y_2 \operatorname{sen} y_3 \ldots \operatorname{sen} y_{n-1} \cos y_n\,,\; x_n = y_1 \operatorname{sen} y_2 \operatorname{sen} y_3 \ldots \operatorname{sen} y_n$$

si ottengono facilmente la $E_{r,s}=0$ e le :

$$E_{1,1} = 1\,,\; E_{2,2} = y_1^2\,,\; E_{3,3} = y_1^2 \operatorname{sen}^2 y_2\,,\; E_{4,4} = y_1^2 \operatorname{sen}^2 y_2 \operatorname{sen}^2 y_3 \ldots$$

$$E_{n,n} = y_1^2 \operatorname{sen}^2 y_2 \operatorname{sen}^2 y_3 \ldots \operatorname{sen}^2 y_{n-1}$$

e quindi :

$$L_1 Q = y_1^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} y_2 \operatorname{sen}^{n-3} y_3 \ldots \operatorname{sen} y_{n-1} \frac{dF}{dy_1}$$

$$L_2 Q = y_1^{n-3} \operatorname{sen}^{n-2} y_2 \operatorname{sen}^{n-3} y_3 \ldots \operatorname{sen} y_{n-1} \frac{dF}{dy_2}$$

$$L_3 Q = y_1^{n-3} \operatorname{sen}^{n-4} y_2 \operatorname{sen}^{n-3} y_3 \ldots \operatorname{sen} y_{n-1} \frac{dF}{dy_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_r Q = y_1^{n-3} \operatorname{sen}^{n-4} y_2 \operatorname{sen}^{n-5} y_3 \ldots \operatorname{sen}^{n-r-1} y_{r-1} \operatorname{sen}^{n-r} y_r \ldots \operatorname{sen} y_{n-1} \frac{dF}{dy_r}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pel caso di $n=3$ si ottiene la :

(*) Mathematische Werke. Band. II.

(**) Journal de l'École Polytecnique. Cahier. 23°. — Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique. Tome deuxieme.

$$\frac{d^2F}{dx_1^2}+\frac{d^2F}{dx_2^2}+\frac{d^2F}{dx_3^2}=\text{sen}\,y_2\,\frac{d\,y_1^2\,\dfrac{dF}{dy_1}}{dy_1}+\frac{d\,\text{sen}\,y_2\,\dfrac{dF}{dy_2}}{dy_2}+\frac{1}{\text{sen}\,y_2}\,\frac{d^2F}{dy_3^2}=0$$

la quale è la nota trasformazione di Laplace.

Dalla seconda delle equazioni (109) si ricava mediante la derivazione la seguente :

$$(115)\quad x_1'(y_s)\frac{dx_1'(y_r)}{dy_m}+x_2'(y_s)\frac{dx_2'(y_r)}{dy_m}+\ldots+x_n'(y_s)\frac{dx_n'(y_r)}{dy_m}=\frac{1}{2}\left(\frac{dE_{r,s}}{dy_m}+\frac{dE_{m,s}}{dy_r}-\frac{dE_{r,m}}{dy_s}\right)$$

e da questa ponendo :

$$M_s=\frac{1}{2}\left(\frac{dE_{r,s}}{dy_m}+\frac{dE_{m,s}}{dy_r}-\frac{dE_{r,m}}{dy_s}\right)$$

si hanno le :

$$(116)\quad\begin{aligned}
\frac{dx_1'(y_r)}{dy_m}&=M_1y_1'(x_1)+M_2y_2'(x_1)+\ldots+M_ny_n'(x_1)\\
\frac{dx_2'(y_r)}{dy_m}&=M_1y_1'(x_2)+M_2y_2'(x_2)+\ldots+M_ny_n'(x_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n'(y_r)}{dy_m}&=M_1y_1'(x_n)+M_2y_2'(x_n)+\ldots+M_ny_n'(x_n)
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il determinante :

$$V=\begin{vmatrix}
X_1 & X_{1,1} & X_{1,2} & \ldots & X_{1,n}\\
X_2 & X_{2,1} & X_{2,2} & \ldots & X_{2,n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
X_n & X_{n,1} & X_{n,2} & \ldots & X_{n,n}\\
0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_n
\end{vmatrix}$$

nel quale $X_{s,r}=X_{r,s}=\dfrac{dX_r}{dx_s}$, ed osserviamo che esso può risultare dal prodotto dei due seguenti :

$$\begin{vmatrix}
Y_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n}\\
Y_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
Y_n & a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}\\
0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_n
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
y_1'(x_1) & y_1'(x_2) & \ldots & y_1'(x_n) & 0\\
y_2'(x_1) & y_2'(x_2) & \ldots & y_2'(x_n) & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
y_n'(x_1) & y_n'(x_2) & \ldots & y_n'(x_n) & 0\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{vmatrix}$$

nel primo dei quali si è posto $a_{r,s} = \frac{dX_r}{dy_s}$. Moltiplicando il primo di questi determinanti pel determinante :

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1'(y_1) & x_2'(y_1) & \ldots & x_n'(y_1) \\ 0 & x_1'(y_2) & x_2'(y_2) & \ldots & x_n'(y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_1'(y_n) & x_2'(y_n) & \ldots & x_n'(y_n) \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

e ponendo :

$$(117) \qquad a_{1,r}\, x_1'(y_s) + a_{2,r}\, x_2'(y_s) + \ldots + a_{n,r}\, x_n'(y_s) = h_{r,s}$$

si ottiene :

$$S = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \ldots & h_{1,n} & Y_1 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \ldots & h_{2,n} & Y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \ldots & h_{n,n} & Y_n \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n & 0 \end{vmatrix}$$

e siccome per le operazioni eseguite si ha evidentemente $S = VQ^2$ sarà :

$$V = \frac{S}{H}$$

Notiamo che derivando la equazione :

$$Y_s = X_1 x_1'(y_s) + X_2 x_2'(y_s) + \ldots + X_n x_n'(y_s)$$

rispetto ad y_r si ha per le equazioni (111), (116) e (117) :

$$Y_{s,r} = Y_{r,s} = h_{r,s} + \tfrac{1}{2}\, \Sigma_m L_m \left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m} \right)$$

dalla quale :

$$h_{r,s} = Y_{r,s} - \tfrac{1}{2}\, \Sigma_m L_m \left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m} \right)$$

e quindi la espressione V risulterà formata colle $Y_1, Y_2 \ldots E_{r,s}$ e loro derivate.

Se nella espressione :

$$\tfrac{1}{2}\, \Sigma_m L_m \left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m} \right)$$

sostituiamo per L_m il suo valore (112) si ha:

$$\frac{1}{H} \Sigma_i Y_i \Sigma_m \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right) \frac{dH}{dE_{m,i}}$$

e siccome per le (109) (115) il determinante:

$$\Sigma_m \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right) \frac{dH}{dE_{m,i}}$$

risulta dal prodotto dei due:

$$Q \cdot \begin{vmatrix} x_1'(y_1) & x_1'(y_2) & \dots & x_1'(y_{i-1}) & \dfrac{dx_1'(y_s)}{dy_r} & x_1'(y_{i+1}) & \dots & x_1'(y_n) \\ x_2'(y_1) & x_2'(y_2) & \dots & x_2'(y_{i-1}) & \dfrac{dx_2'(y_s)}{dy_r} & x_2'(y_{i+1}) & \dots & x_2'(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n'(y_1) & x_n'(y_2) & \dots & x_n'(y_{i-1}) & \dfrac{dx_n'(y_s)}{dy_r} & x_n'(y_{i+1}) & \dots & x_n'(y_n) \end{vmatrix}$$

indicando quest' ultimo determinante con ${}^{(i)}N_{s,r}$ si avrà:

$$h_{r,s} = Y_{r,s} - \frac{1}{Q} \Sigma_i Y_i \, {}^{(i)}N_{s,r}$$

Se supponiamo $Y_1 = Y_2 = \dots = Y_{n-1} = 0$ $Y_n = 1$ si hanno le:

$$S = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & \dots & h_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad h_{r,s} = -\frac{1}{Q} \, {}^{(n)}N_{s,r}$$

e ponendo ${}^{(n)}N_{s,r} = k_{s,r} = k_{r,s}$ si ha:

$$V = \frac{1}{(-Q)^{n-1}} \begin{vmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,n-1} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2} & \dots & k_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

dalla quale per $n=3$ si ottiene la nota espressione di Gauss per la curvatura di una superficie (*).

Dalla equazione (102) si deducono due formole di molto uso nella teorica dei determinanti funzionali. Se da s qualsivogliano fra le equazioni :

$$(118)\qquad y_1(x_1, x_2 \ldots x_n)=y_1,\ y_2(x_1, x_2 \ldots x_n)=y_2 \ldots \ y_n(x_1, x_2 \ldots x_n)=y_n$$

si ricavano i valori di $x_{r+1}, x_{r+2} \ldots x_{r+s}$ e questi valori si sostituiscono nelle altre $n-s$ si ottengono le :

$$(119)\qquad \begin{aligned}
&\varphi_1 = y_1 - y_1(x_2, \ldots x_r, y_{r+1}, \ldots y_{r+s}, x_{r+s+1} \ldots x_n)=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_r = y_r - y_r(x_1 \ldots x_r, y_{r+1}, \ldots y_{r+s}, x_{r+s+1} \ldots x_n)=0\\
&\varphi_{r+1} = y_{r+1} - y_{r+1}(x_1, x_2 \ldots x_n)=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{r+s} = y_{r+s} - y_{r+s}(x_1, x_2 \ldots x_n)=0\\
&\varphi_{r+s+1} = y_{r+s+1} - y_{r+s+1}(x_1 \ldots x_r, y_{r+1} \ldots y_{r+s}, x_{r+s+1} \ldots x_n)=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n = y_n - y_n(x_1 \ldots x_r, y_{r+1} \ldots y_{r+s}, x_{r+s+1} \ldots x_n)=0
\end{aligned}$$

Per la forma delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ è evidente la :

$$\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dy_n}$$

e siccome $\frac{d\varphi_r}{dy_r}=1$ si avrà :

$$\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = 1$$

Inoltre essendo :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_{r+1}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+1}} = \ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+1}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+1}} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+1}} = 0\\
&\frac{d\varphi_1}{dx_{r+2}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+2}} = \ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+2}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+2}} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+2}} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_1}{dx_{r+s}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+s}} = \ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+s}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+s}} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+s}} = 0
\end{aligned}$$

(*) Nouveaux Mémoires de la Société Royale des Sciences de Gottingue. T.° VI.°

si ottiene :

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)=\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \cdots & \frac{d\varphi_1}{dx_r} & \frac{d\varphi_1}{dx_{r+s+1}} & \cdots & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_r}{dx_1} & \cdots & \frac{d\varphi_r}{dx_r} & \frac{d\varphi_r}{dx_{r+s+1}} & \cdots & \frac{d\varphi_r}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_1} & \cdots & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_r} & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+s+1}} & \cdots & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} & \cdots & \frac{d\varphi_n}{dx_r} & \frac{d\varphi_n}{dx_{r+s+1}} & \cdots & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+2}} & \cdots & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+s}} \\ \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+2}} & \cdots & \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+2}} & \cdots & \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+s}} \end{vmatrix}$$

Ora per le equazioni (119)

$$\frac{d\varphi_r}{dx_r} = -\,y_r'(x_r)$$

dunque rammentando la (102) si avrà la equazione seguente :

$$P = \Sigma\Big(\pm(y_1'(x_1))\ldots(y_r'(x_r))\,(y'_{r+s+1}(x_{r+s+1}))\ldots(y_n'(x_n))\Big)\,\Sigma\left(\pm y'_{r+1}(x_{r+1})\ldots y'_{r+s}(x_{r+s})\right)$$

nel primo determinante del secondo membro della quale le $y_1'(x_1)$, $y_2'(x_2)\ldots$ si sono poste fra parentesi, giacchè le $y_1, y_2 \ldots y_r, y_{r+s+1} \ldots y_n$ si considerano come funzioni di $x_1, x_2 \ldots x_r, y_{r+1} \ldots y_{r+s}, x_{r+s+1} \ldots x_n$. Affatto analogamente si otterrà la:

$$(120)\quad P=\Sigma\Big(\pm(y'_{r+1}(x_{r+1}))(y'_{r+2}(x_{r+2}))\ldots(y'_{r+s}(x_{r+s}))\Big)\Sigma\left(\pm y_1'(x_1)\ldots y_r'(x_r)\,y'_{r+s+1}(x_{r+s+1})\ldots y_n'(x_n)\right)$$

Se in quest' ultima poniamo $s=1$ si ha :

$$(121)\qquad P=(y'_{r+1}(x_{r+1}))\,.\,\alpha_{r+1,r+1}$$

Supponiamo ora che dalla prima delle (118) si ricavi il valore di x_1 in funzione di $x_2, x_3 \ldots x_n$ e si sostituisca nelle altre; dalla seconda il valore di x_2 in funzione di $x_3, x_4 \ldots x_n$ e si ponga nelle seguenti e così via. Quelle equazioni prenderanno la forma :

$$(122)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= y_1 - y_1(x_2, x_3 \ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2 &= y_2 - y_2(y_1, x_3 \ldots x_n) = 0 \\ \varphi_3 &= y_3 - y_3(y_1, y_2 \ldots x_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n &= y_n - y_n(y_1, y_2 \ldots y_{n-1}, x_n) = 0 \end{aligned}$$

e siccome si hanno evidentemente le :

$$(123) \qquad \Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right)=1\ , \quad \frac{d\varphi_r}{dx_r}=-\left(y_r'(x_r)\right)$$

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)=\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}$$

per la (102) si avrà anche :

$$(124) \qquad P=(y_1'(x_1))(y_2'(x_2))\ \ldots\ (y_n'(x_n))$$

le parentesi dinotando anche in quest' ultima equazione la composizione delle $y_1, y_2 \ldots y_n$.

Applicazione.

Indichiamo con $A_{r,s}$ il determinante :

$$\Sigma\left(\pm y_1'(x_1)\,y_2'(x_2)\ \ldots\ y'_m(x_m)\,y'_{m+r}(x_{m+s})\right)$$

Se nella funzione y_{m+r} si introducono le $y_1, y_2 \ldots y_m$ in luogo delle $x_1, x_2 \ldots x_m$ si ha per la formola (121) :

$$A_{r,s}=\left(y'_{m+r}(x_{m+s})\right)\Sigma\left(\pm y_1'(x_1)\,y_2'(x_2)\ldots y'_m(x_m)\right)$$

e quindi sarà :

$$\Sigma\left(\pm A_{1,1}A_{2,2}\ldots A_{n-m,n-m}\right)=\left\{\Sigma\left(\pm y_1'(x_1)\ldots y'_m(x_m)\right)\right\}^{n-m}\Sigma\left(\pm(y'_{m+1}(x_{m+1}))\ldots(y'_n(x_n))\right)$$

ed osservando la (120) :

$$\Sigma\left(\pm A_{1,1}A_{2,2}\ \ldots\ A_{n-m,n-m}\right)=P.\left\{\Sigma\left(\pm y_1'(x_1)\,y_2'(x_2)\ \ldots\ y'_m(x_m)\right)\right\}^{n-m-1}$$

Supponiamo :

$$y_r=a_{r,1}x_1+a_{r,2}x_2+\ldots+a_{r,n}x_n.$$

si ha :

$$A_{r,s}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,m} & a_{1,m+s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,m} & a_{2,m+s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots\ldots & a_{m,m} & a_{m,m+s} \\ a_{m+r,1} & a_{m+r,2} & \ldots & a_{m+r,m} & a_{m+r,m+s} \end{vmatrix}$$

e quindi :

$$\Sigma(\pm A_{1,1} A_{2,2} \dots A_{n-m,n-m}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}^{n-m-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

La proprietà espressa in questa formola è dovuta al Sig. Sylvester (*). Se nell' equazione superiore poniamo $m=n-2$ si ottiene una equazione che è un caso particolare della (14) del §. 3.°

È evidente che se le funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$ non sono indipendenti fra loro, ma sono legate dall' equazione :

$$\varphi(y_1, y_2 \dots y_n) = 0$$

il determinante P è eguale a zero. Ciò provasi osservando che hanno luogo n equazioni analoghe alla :

$$\frac{d\varphi}{dy_1} y_1'(x_r) + \frac{d\varphi}{dy_2} y_2'(x_r) + \dots + \frac{d\varphi}{dy_n} y_n'(x_r) = 0$$

e quindi sarà $P = 0$.

Col mezzo dell' equazione (121) possiamo dimostrare anche la reciproca; cioè che se il determinante P è eguale a zero, le funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$ non sono indipendenti fra loro. Supporremo che la proprietà si verifichi pel determinante dell' $n-1$ ordine $\alpha_{r,r}$, e proveremo che in questa ipotesi si verifica anche pel determinante P; talchè quando quella proprietà sarà dimostrata pel determinante del secondo ordine lo sarà anche in generale. Osserviamo che se $P = 0$, per l' equazione (121) dovrà essere eguale a zero o $(y_r'(x_r))$, oppure $\alpha_{r,r}$. Nel secondo caso per l' ipotesi ammessa sarebbero le $y_1, y_2 \dots y_{r-1}, y_{r+1} \dots y_n$ non indipendenti fra loro, il che non può aver luogo osservando al modo mediante il quale fu trovata la equazione medesima (121), dunque dovrà essere $(y_r'(x_r)) = 0$; cioè y_r sarà esprimibile col mezzo delle sole funzioni $y_1, y_2 \dots y_{r-1}, y_{r+1} \dots y_n$, e quindi le funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$ non saranno indipendenti fra loro.

Ora il determinante del secondo ordine :

$$y_1'(x_1)\, y_2'(x_2) - y_1'(x_2)\, y_2'(x_1)$$

(*) Philosophical Magazine. 1851.

per l' equazione (121) è eguale ad :

$$(y_1'(x_1))\, y_2'(x_2)$$

e siccome la funzione y_2 conterrà in generale la variabile x_2, se il determinante sarà nullo lo dovrà essere $(y_1'(x_1))$, e quindi le funzioni y_1, y_2 non saranno indipendenti fra loro.

La formola (102) dà il valore del determinante P quando fra le n variabili x, e le n funzioni y sussistano n equazioni $\varphi=0$. Supponiamo ora che le funzioni y e le equazioni $\varphi=0$ sieno in numero maggiore delle variabili x, e veniamo a determinare il valore del determinante P. Sieno :

$$\varphi_1=0\ ,\ \varphi_2=0 \ldots\ \varphi_{n+r}=0$$

$n+r$ equazioni che hanno luogo fra le n variabili x, e le funzioni $y_1, y_2 \ldots y_{n+r}$ di queste variabili. Ricavando dalle $\varphi_{n+1}=0$, $\varphi_{n+2}=0 \ldots \varphi_{n+r}=0$ i valori di y_{n+1}, $y_{n+2} \ldots y_{n+r}$, e sostituendo questi valori nelle prime n equazioni si hanno le :

$$\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n)=0\ ,\ \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n)=0 \ldots \varphi_n(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n)=0$$

Queste n equazioni danno per la formola (102) :

$$(125)\qquad \mathrm{P}\,\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dy_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right)\right)=(-1)^n\,\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\right)$$

nella quale le derivate sono poste fra parentesi per indicare la composizione delle $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$. Ora osserviamo che :

$$\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\right)=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

e che :

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\,\frac{d\varphi_{n+2}}{dy_{n+2}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\,\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)$$

essendo :

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dy_{n+1}}\right)=\left(\frac{d\varphi_2}{dy_{n+1}}\right)=\ldots=\left(\frac{d\varphi_1}{dy_{n+2}}\right)=\ldots=\left(\frac{d\varphi_n}{dy_{n+r}}\right)=0$$

Inoltre si ha evidentemente :

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)=\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dy_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right)\right)\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\frac{d\varphi_{n+2}}{dy_{n+2}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)$$

dunque dall' equazione (125) si avrà :

$$P\,\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\cdots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)$$

la quale dà il valore del determinante P.

Se le $y_1, y_2 \ldots y_n$ saranno funzioni composte delle variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$, cioè fossero funzioni di altre funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ delle variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$ dall'equazione (102) si ha evidentemente :

$$P=\Sigma\left(\pm\frac{dy_1}{d\varphi_1}\frac{dy_2}{d\varphi_2}\cdots\frac{dy_n}{d\varphi_n}\right)\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

e se le funzioni componenti saranno in numero maggiore delle $y_1, y_2 \cdots y_n$; per esempio fossero in numero $m>n$, si avrebbe per la (61) del §. 7.°:

$$P=\Sigma\left\{\Sigma\left(\pm\frac{dy_1}{d\varphi_{r_1}}\frac{dy_2}{d\varphi_{r_2}}\cdots\frac{dy_n}{d\varphi_{r_n}}\right)\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{r_1}}{dx_1}\frac{d\varphi_{r_2}}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_{r_n}}{dx_n}\right)\right\}$$

nella quale il primo simbolo Σ rappresenta la somma di tanti prodotti analoghi all' esposto i quali si ottengono ponendo in luogo degli indici $r_1, r_2 \ldots r_n$ n qualunque dei numeri $1, 2, 3 \ldots m$.

Supponiamo che fra le variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$ sieno date le n equazioni :

$$y_1=\alpha_1\,,\quad y_2=\alpha_2 \ldots\ldots y_n=\alpha_n$$

nelle quali $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sono costanti, e che mediante trasformazioni eseguite su di esse equazioni, si riducano le medesime alla forma :

$$\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)=\alpha_1,\ \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)=\alpha_2 \ldots \varphi_n(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)=\alpha_n$$

Le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ si potranno ritenere come funzioni implicite, e per la formola (102) si avrà :

$$P\,\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha_1}-1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha_2}-1\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{d\alpha_n}-1\right)\right)=(-1)^n\,\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

Quindi il determinante funzionale P non cambierà di valore in questa trasformazione ogni qualvolta sia:

$$\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha_1}-1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha_2}-1\right)\ldots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}-1\right)\right)=1$$

come sarebbe nel caso in cui φ_1 non contenesse α_2, φ_2 non contenesse α_1, α_3 . . e φ_n non contenesse $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Applicazione.

Dall' equazione (124) si deduce la formola generale per la trasformazione degli integrali multipli. Si consideri l' integrale multiplo dell' ordine ennesimo:

$$\int^n U\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

e si suppongano le $y_1, y_2 \ldots y_n$ legate ad altre n variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$ dalle equazioni (122). Estendendo la regola ordinaria per la trasformazione degli integrali semplici, (come si fa generalmente nella ricerca delle formole per la trasformazione degli integrali duplicati, e triplicati (*)) si ottiene la:

$$\int^n U\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n = \int^n U\, \frac{d\varphi_1}{dx_1}\, \frac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \frac{d\varphi_n}{dx_n} \cdot dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

ossia per le equazioni (123), (124):

$$\int^n U\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n = \int^n U \, . \, P\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

la quale è la formola richiesta. Affatto analogamente si avrà:

$$\int^n U\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int^n U \, . \, Q\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

Quest' ultima equazione per la seconda delle (109) si può anche scrivere:

$$\int^n U\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int^n U \, . \sqrt{H} \, . \, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

(*) Bordoni. Lezioni di Calcolo Sublime. Tomo I.

e nella supposizione che $E_{r,s}=0$ si avrà :

$$\int^n U\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int^n U \sqrt{(E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{n,n})}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

Supponiamo che le equazioni fra le variabili x, y sieno della forma :

$$\frac{x_1^2}{y_r - a_1} + \frac{x_2^2}{y_r - a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_r - a_n} = 1$$

nella quale $a_1, a_2 \ldots a_n$ sono costanti. Posto :

$$F(z) = (z-y_1)(z-y_2)\ldots(z-y_n) \qquad f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)$$

si hanno come è noto le :

$$x_1^2 = -\frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \quad x_2^2 = -\frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \ldots \quad x_n^2 = -\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}$$

e quindi derivando rispetto ad y_r :

$$x_1 x_1'(y_r) = \tfrac{1}{2} \frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \frac{1}{a_1 - y_r}, \quad x_2 x_2'(y_r) = \tfrac{1}{2} \frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \frac{1}{a_2 - y_r}, \ldots x_n x_n'(y_r) = \tfrac{1}{2} \frac{F(a_n)}{f'(a_n)} \frac{1}{a_n - y_r}$$

dalle quali :

$$x_1'^2(y_r) = -\tfrac{1}{4} \frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \frac{1}{(a_1 - y_r)^2}, \quad x_2'^2(y_r) = -\tfrac{1}{4} \frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \frac{1}{(a_2 - y_r)^2}, \ldots x_n'^2(y_r) = -\tfrac{1}{4} \frac{F(a_n)}{f'(a_n)} \frac{1}{(a_n - y_r)^2}$$

ed :

$$x_1'(y_r)\, x_1'(y_s) = -\tfrac{1}{4} \frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \frac{1}{(a_1 - y_r)(a_1 - y_s)}, \ldots x_n'(y_r)\, x_n'(y_s) = -\tfrac{1}{4} \frac{F(a_n)}{f'(a_n)} \frac{1}{(a_n - y_r)(a_n - y_s)}$$

Ora se si rammentano le equazioni :

$$-\frac{F'(y_r)}{f(y_r)} = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \frac{1}{(a_1 - y_r)^2} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \frac{1}{(a_2 - y_r)^2} + \ldots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)} \frac{1}{(a_n - y_r)^2}$$

$$0 = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \frac{1}{(a_1 - y_r)(a_1 - y_s)} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \frac{1}{(a_2 - y_r)(a_2 - y_s)} + \ldots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)} \frac{1}{(a_n - y_r)(a_n - y_s)}$$

si hanno le:

$$E_{r,s} = 0 \,. \quad E_{r,r} = \pm\frac{1}{4}\frac{F'(y_r)}{f(y_r)}$$

e quindi sarà:

$$\int^n U\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \pm\frac{1}{2}\int^n U\, \frac{\sqrt{(F'(y_1)F'(y_2)\ldots F'(y_n))}}{\sqrt{(f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n))}}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

Col mezzo di questa formola il Sig. Catalan è giunto ad estendere ai trascendenti Abeliani alcune relazioni sussistenti fra i trascendenti elittici (*).

§. 11.° Del determinante di Hesse.

Sia u una funzione intera, omogenea delle n variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$. Si indichino con $u_1, u_2 \ldots u_n$ le derivate prime della u rispetto a ciascuna di esse variabili, e con $u_{1,1}, u_{1,2} \ldots$ le derivate seconde, cioè sia:

$$u_{r,s} = u_{s,r} = \frac{d^2 u}{dx_r\, dx_s}$$

Il determinante:

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

viene denominato l' *Hessiano* della funzione u, od il determinante di Hesse, per l' importante uso fattone dal Sig.r Hesse in varie ricerche geometriche. Questo determinante viene da alcuni geometri rappresentato col simbolo Hu. È evidente che se la funzione u sarà dell' $m$esimo grado, il determinante v sarà una funzione omogenea del grado $n(m-2)$esimo.

Supponiamo che le variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$ sieno legate ad altre n variabili y_1, $y_2 \ldots y_n$ da n equazioni lineari analoghe alla:

$$x_r = a_{1,r}\, y_1 + a_{2,r}\, y_2 + \ldots + a_{n,r}\, y_n$$

e sostituiti questi valori nella funzione u si ponga:

$$K = \Sigma\left(\pm\frac{d^2u}{dy_1^2}\,\frac{d^2u}{dy_2^2} \ldots \frac{d^2u}{dy_n^2}\right), \qquad P = \Sigma\,(\pm\, a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$

(*) Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles. 1841.

avremo:

$$K = P^2 . v$$

Infatti derivando la funzione u rispetto ad y_r si ha:

$$\frac{du}{dy_r} = u_1 a_{r,1} + u_2 a_{r,2} + \ldots + u_n a_{r,n}$$

e derivando quest' ultima equazione rispetto ad y_s, e rispetto ad x_s si hannu le:

$$\frac{d^2u}{dy_r\, dy_s} = \frac{du_1}{dy_s} a_{r,1} + \frac{du_2}{dy_s} a_{r,2} + \ldots + \frac{du_n}{dy_s} a_{r,n}$$

$$\frac{d^2u}{dy_r\, dx_s} = u_{1,s}\, a_{r,1} + u_{2,s}\, a_{r,2} + \ldots + u_{n,s}\, a_{r,n}$$

Per queste equazioni, e per la nota regola della moltiplicazione dei determinanti si ottengono facilmente le equazioni:

$$\Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dx_1 dy_1} \frac{d^2u}{dx_2 dy_2} \ldots \frac{d^2u}{dx_n dy_n}\right) = P.v , \quad K = P\,\Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dx_1 dy_1} \frac{d^2u}{dx_2 dy_2} \ldots \frac{d^2u}{dx_n dy_n}\right)$$

dal confronto delle quali si ha la $K = P^2 . v$. Se la sostituzione sarà ortogonale, cioè se i coefficienti $a_{r,s}$ soddisfano alle due equazioni:

$$a^2_{r,1} + a^2_{r,2} + \ldots + a^2_{r,n} = 1$$

$$a_{r,1}\, a_{s,1} + a_{r,2}\, a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\, a_{s,n} = 0$$

si ha $P = 1$ e quindi sarà $K = v$.

Supponendo la sostituzione essere qualunque, se la funzione nella quale trasformasi la u in conseguenza della sostituzione medesima non conterrà una qualsivoglia delle variabili $y_1, y_2, \ldots y_n$ il determinante v sarà identicamente nullo; giacchè se la variabile mancante fosse per esempio la y_r si avrebbero le:

$$\frac{d^2u}{dy_1\, dy_r} = \frac{d^2u}{dy_2\, dy_r} = \ldots = \frac{d^2u}{dy_n\, dy_r} = 0$$

e quindi sarebbe K identicamente nullo, e per conseguenza anche v.

Reciprocamente se il determinante v è identicamente nullo, si potrà mediante una sostituzione lineare trasformare la funzione u in una funzione omogenea di $n-1$

variabili $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$. Infatti essendo v eguale a zero per l' equazione (14) si avrà:

$$\frac{dv}{du_{r,r}}\,\frac{dv}{du_{s,s}} = \left(\frac{dv}{du_{r,s}}\right)^2$$

e quindi gli elementi reciproci del determinante v ammetteranno un fattore comune M dell'$(n-1)(m-2)$ grado, ed indicando con α_r, α_s due costanti si avrà:

(126) $$\frac{dv}{du_{r,r}} = \alpha_r^2.\mathrm{M}\,, \quad \frac{dv}{du_{r,s}} = \alpha_r\,\alpha_s\,\mathrm{M}$$

Ora essendo u funzione omogenea dell' m grado si hanno, come è noto, le:

(127) $$\begin{array}{l} u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \ldots + u_{1,n}x_n = (m-1)u_1 \\ u_{2,1}x_1 + u_{2,2}x_2 + \ldots + u_{2,n}x_n = (m-1)u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1}x_1 + u_{n,2}x_2 + \ldots + u_{n,n}x_n = (m-1)u_n \end{array}$$

dalle quali si ottiene in generale:

$$\frac{v}{m-1}\,x_r = u_1\frac{dv}{du_{1,r}} + u_2\frac{dv}{du_{2,r}} + \ldots + u_n\frac{dv}{du_{n,r}}$$

ed allorquando $v=0$ pei valori (126) si avrà:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

Pongansi nella funzione u:

$$x_1 = z_1 + \lambda\alpha_1\,, \quad x_2 = z_2 + \lambda\alpha_2 \ldots\ldots x_n = z_n + \lambda\alpha_n$$

essendo:

$$z_r = a_{1,r}\,y_1 + a_{2,r}\,y_2 + \ldots + a_{n-1,r}\,y_{n-1}$$

e λ una quantità indeterminata. Sviluppando si ottiene:

$$u = w + \lambda w' + \frac{\lambda^2}{2}w'' + \ldots + \frac{\lambda^m}{1.2\ldots m}w^{(m)}$$

supposto che w rappresenti ciò che diventa u allorquando pongansi in esso z_1, $z_2 \ldots z_n$ in luogo di $x_1, x_2 \ldots x_n$; e w' rappresenti il valore di $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$

nella medesima condizione. Siccome poi:

$$w'' = \frac{dw'}{dz_1}\alpha_1 + \frac{dw'}{dz_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{dw'}{dz_n}\alpha_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w^{(m)} = \frac{dw^{(m-1)}}{dz_1}\alpha_1 + \frac{dw^{(m-1)}}{dz_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{dw^{(m-1)}}{dz_n}\alpha_n;$$

allorquando la espressione $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$ sarà identicamente nulla, lo sarà w' e quindi anche w'', $w'''\ldots w^{(m)}$, e lo sviluppo superiore si ridurrà alla $u=w$; cioè la funzione u pel caso che $v=0$ identicamente può ridursi alla w omogenea fra le $n-1$ variabili y_1, $y_2, \ldots y_{n-1}$ come si era dichiarato.

Questo importante teorema dovuto al Sig. Hesse (*) venne dal medesimo autore applicato alla dimostrazione dei due seguenti:

1.° Se $u=0$ rappresenta la equazione omogenea di una linea piana dell' ennesimo ordine, la condizione perchè questa curva riducasi ad m rette condotte da uno stesso punto, è che il determinante v sia identicamente nullo.

2.° Se $u=0$ rappresenta la equazione omogenea di una superficie dell'emmesimo ordine, la condizione perchè essa superficie sia un cono, è la $v=0$ identicamente.

Dalle equazioni (127), posto $\frac{dv}{du_{r,s}} = U_{r,s}$ ricavasi la:

$$v x_r = (m-1)(U_{1,r}u_1 + U_{2,r}u_2 + \ldots + U_{n,r}u_n)$$

la quale, derivata rispetto ad x_s, supponendo gli indici r, s differenti fra loro dà:

$$(128) \qquad v_s x_r = (m-1)\left\{\frac{dU_{1,r}}{dx_s}u_1 + \frac{dU_{2,r}}{dx_s}u_2 + \ldots + \frac{dU_{n,r}}{dx_s}u_n\right\}$$

e derivata rispetto ad x_r dà:

$$v_r x_r = (m-2)v + (m-1)\left\{\frac{dU_{1,r}}{dx_r}u_1 + \frac{dU_{2,r}}{dx_r}u_2 + \ldots + \frac{dU_{n,r}}{dx_r}u_n\right\}$$

Quindi se $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$ essendo $v=0$ si avrà $v_r = 0$ qualunque sia r; e dall' equazione (14) si avrà:

$$\frac{dU_{r,r}}{dx_r}U_{s,s} + \frac{dU_{s,s}}{dx_r}U_{r,r} = 2U_{r,s}\frac{dU_{r,s}}{dx_r}$$

(*) Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 42. 1851.

la quale è soddisfatta ponendo:

$$U_{r,r} = N x_r^2\,, \quad U_{r,s} = N x_r x_s \tag{129}$$

indicando N un fattore comune a tutti gli elementi reciproci del determinante v. Derivando nuovamente la equazione (128) rispetto ad x_i si ha:

$$\begin{aligned} v_{s,i}\, x_r = (m-1)&\left\{ \frac{d^2 U_{1,r}}{dx_s dx_i} u_1 + \frac{d^2 U_{2,r}}{dx_s dx_i} u_2 + \ldots + \frac{d^2 U_{n,r}}{dx_s dx_i} u_n \right\} \\ -(m-1)&\left\{ U_{1,r} \frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r} \frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots + U_{n,r} \frac{du_{n,s}}{dx_i} \right\} \end{aligned} \tag{130}$$

essendo identicamente:

$$\frac{dU_{1,r}}{dx_s} u_{1,i} + \frac{dU_{2,r}}{dx_s} u_{2,i} + \ldots + \frac{dU_{n,r}}{dx_s} u_{n,i} = -\left(U_{1,r} \frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r} \frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots + U_{n,r} \frac{du_{n,s}}{dx_i} \right)$$

in causa della nota equazione:

$$U_{1,r} u_{1,i} + U_{2,r} u_{2,i} + \ldots + U_{n,r} u_{n,i} = 0$$

Ora se $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$, dalla (130) si ha:

$$v_{s,i} x_r = -(m-1)\left\{ U_{1,r} \frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r} \frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots + U_{n,r} \frac{du_{n,s}}{dx_i} \right\}$$

ossia sostituendo i valori (129) si ha:

$$v_{s,i} = -(m-1) N \left(x_1 \frac{du_{1,s}}{dx_i} + x_2 \frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots + x_n \frac{du_{n,s}}{dx_i} \right)$$

o per una nota proprietà delle funzioni omogenee:

$$v_{s,i} = -(m-1)(m-2) N . u_{s,i}$$

Ne risulta che allorquando sieno nulle le u_1, $u_2 \ldots u_n$ è eguale a zero non solo l' Hessiano della funzione u, ma anche l' Hessiano dell' Hessiano medesimo, cioè della funzione v. Pel caso di $n = 3$, le equazioni $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ sono soddisfatte, come è noto, ai punti multipli della linea rappresentata dall' equazione $u = 0$; e dovendo essere per questi punti $v = 0$, i punti medesimi risulteranno dalla comune

intersezione delle linee rappresentate dalle equazioni $u=0$, $v=0$, ed inoltre saranno punti multipli anche per la linea rappresentata dall' equazione $v=0$.

Supponiamo ora che $u=0$ sia una equazione algebrica, intera, razionale del grado m delle $n-1$ variabili x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$; e consideriamo il determinante :

$$H = \begin{vmatrix} u_1 & u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n-1} \\ u_2 & u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n-1} \\ 0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

Se la equazione $u=0$ si rende omogenea ponendo $\frac{x_1}{x_n}$, $\frac{x_2}{x_n} \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$ in luogo delle variabili x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$ e moltiplicando tutti i termini per x_n^m; sussisteranno le equazioni (127) e la :

$$(131) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = mu$$

mediante le quali si potrà trasformare il determinante H nel modo seguente. È evidente essere :

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} (m-1)u_1 & u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n-1} \\ (m-1)u_2 & u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)u_{n-1} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n-1} \\ 0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

e siccome aggiungendo rispettivamente agli elementi della prima colonna quelli della seconda moltiplicati per $-x_1$, quelli della terza moltiplicati per $-x_2$, ecc. il valore del determinante H non si altera, per le equazioni (127) e la (131), si ha :

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} x_n u_{1,n} & u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n-1} \\ x_n u_{2,n} & u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n u_{n-1,n} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n-1} \\ x_n u_n - mu & u_1 & u_2 & \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

ossia :

$$H = -\frac{m}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n-1} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1}\frac{x_n}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,n} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

Osserviamo che quest' ultimo determinante può scriversi :

$$\frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,n} \\ (m-1)u_1 & (m-1)u_2 & \dots & (m-1)u_n \end{vmatrix}$$

quindi ripetendo sopra di esso l' operazione eseguita sopra si avrà :

$$H = -\frac{m}{m-1}u\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n-1} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1}\frac{x_n^2}{(m-1)^2}\,.\,v$$

Da questa equazione deducesi che per quei valori delle $x_1, x_2 \dots$ i quali soddisfano l' equazione $u = 0$, ed annullano il determinante H, sarà anche $v = 0$.

Applicazione.

Indicando con r il raggio di curvatura di una curva piana rappresentata dall' equazione $u = 0$ si ha :

$$(132) \qquad r = \pm\frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}$$

Ai punti di flesso di quella curva si ha come è noto $r = \infty$, e quindi $H = 0$ o pel teorema superiore :

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione rappresenta una linea del $3(m-2)$esimo grado la quale sega la linea data ne' suoi punti di flesso, che per conseguenza saranno al più $3m(m-2)$ in numero (*).

Indicando con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di una superficie $u=0$ si ha:

$$r_1 r_2 = \frac{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^2}{H}$$

Per quei punti della superficie pei quali uno dei raggi di curvatura è infinito si ha $H=0$ e quindi:

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione rappresenta una superficie del grado $4(m-2)$, e la linea di intersezione di questa superficie colla superficie $u=0$, sarà una linea di inflessione, o linea dei punti *parabolici* per questa superficie (**).

Esempio. Consideriamo la equazione delle linee del terzo ordine:

$$u = a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3 + 6h\,x_1x_2x_3 = 0$$

alla qual forma, come è noto, si può sempre ridurre l'equazione generale. Si avrà:

$$v = 6^3 \begin{vmatrix} a_1x_1 & hx_3 & hx_2 \\ hx_3 & a_2x_2 & hx_1 \\ hx_2 & hx_1 & a_3x_3 \end{vmatrix} = 0$$

la quale equazione si può porre sotto la forma:

$$h^2(a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3) - k\,x_1x_2x_3 = 0$$

essendo $k = a_1a_2a_3 + 2h^3$. Osserviamo che eguagliando a zero l' Hessiano del primo membro di questa equazione si ha:

$$3h^2k^2(a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + a_3x_3^3) + (k^3 - 108a_1a_2a_3h^6)x_1x_2x_3 = 0$$

(*) Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 28. — Salmon. On the higher plane curves. pag. 72.

(**) Gergonne. Annales de Mathématiques. T.me 21°. — The Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1848 1849.

la quale ponendo :

$$3h^2k^2 = \lambda + \mu h^3 \qquad k^3 - 108\, a_1 a_2 a_3 h^6 = 6\lambda h - \mu k$$

riducesi evidentemente alla :

$$(133) \qquad \lambda u - \frac{1}{6^3}\mu v = 0$$

I valori di λ, μ si ricavano facilmente dalle due equazioni superiori e sono :

$$\lambda = 4h^2(h^3 - a_1a_2a_3)^2, \qquad \mu = 8h^6 + 20\, a_1a_2a_3h^3 - a_1^2a_2^2a_3^2$$

La equazione (133) essendo evidentemente soddisfatta per quei valori di x_1, x_2, x_3 che rendono $u=0$, $v=0$; ne risulta l' interessante proprietà che i punti di intersezione delle linee $u=0$, $v=0$ sono punti di flesso anche per la seconda di esse linee (*). Questa proprietà ha luogo solamente per le linee del terzo ordine.

Indichiamo con w una funzione algebrica, intera razionale di grado r delle $n-1$ variabili z_1, $z_2 \ldots z_{n-1}$, e posto :

$$k = \begin{vmatrix} w_1 & w_{1,1} & w_{1,2} & \ldots & w_{1,n-1} \\ w_2 & w_{2,1} & w_{2,2} & \ldots & w_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n-1} & w_{n-1,1} & w_{n-1,2} & \ldots & w_{n-1,n-1} \\ 0 & w_1 & w_2 & \ldots & w_{n-1} \end{vmatrix}$$

se rendesi omogenea l' equazione $w=0$ sostituendo alle z_1, $z_2 \ldots z_{n-1}$ i rapporti :

$$\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n} \ldots \frac{z_{n-1}}{z_n}$$

si avrà :

$$\mathrm{K} = -\frac{r}{r-1}w \begin{vmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \ldots & w_{1,n-1} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \ldots & w_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n-1,1} & w_{n-1,2} & \ldots & w_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1}\frac{z_n^2}{(r-1)^2}\mathrm{V}$$

essendo V l' Hessiano della funzione w. Supponiamo che le variabili x_1, $x_2 \ldots x_n$ sieno legate alle variabili z_1, $z_2 \ldots z_n$ dai due sistemi di equazioni :

(*) Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 28.

$$w_1 = x_1 \quad w_2 = x_2 \ldots w_n = x_n$$
$$u_1 = z_1 \quad u_2 = z_2 \ldots u_n = z_n$$

si avranno evidentemente n^2 equazioni, le quali ponno dedursi dalle due seguenti:

$$w_{1,r} u_{1,r} + w_{2,r} u_{2,r} + \ldots + w_{n,r} u_{n,r} = 1$$
$$w_{1,s} u_{1,r} + w_{2,s} u_{2,r} + \ldots + w_{n,s} u_{n,r} = 0$$

ponendo r ed $s = 1, 2, \ldots n$. Per queste equazioni si ha:

(134) $$V . v = 1$$

e per quei valori di $x_1, x_2 \ldots ; z_1, z_2 \ldots$ che soddisfano alle equazioni $u = 0$, $w = 0$ sarà:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n = 0$$

L'equazione (134) mostra che a $v = \infty$ corrisponde $V = 0$.

Applicazione.

Ai punti di regresso di una linea piana rappresentata dall' equazione $u = 0$ si ha $r = 0$, quindi per l' equazione (132) sarà $H = \infty$ e $v = \infty$; ossia:

$$V = \begin{vmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

Le variabili $x_1, x_2, x_3 ; z_1, z_2, z_3$ essendo legate dall' equazione:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0$$

le z_1, z_2, z_3 potranno rappresentare coordinate *lineari* o *tangenziali*, e la $V = 0$ rappresenterà una linea della $3(r-2)$esima classe, la quale segherà la linea di cui la equazione è la $u = 0$ o la $w = 0$ nei suoi punti di regresso. Quindi una curva dell' $r$esima classe ha in generale $3r(r-2)$ punti di regresso (*). Analogamente per quei punti di una superficie pei quali uno dei raggi di curvatura è nullo si ha $V = 0$, e dovendo le variabili z_1, z_2, z_3, z_4 soddisfare alla:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + x_4 z_4 = 0$$

(*) Crelle. Journal für die Mathematik. Band. 38.

le variabili medesime rappresenteranno coordinate *lineari* o *planari*, e la $V=0$ rappresenterà una superficie della $4(r-2)$esima classe, la comune intersezione della quale colla superficie $u=0$ o $w=0$ è una linea di regresso per quest'ultima superficie.

Osserviamo che allorquando V è identicamente nullo, la funzione w per quanto si è dimostrato sopra può ridursi mediante una sostituzione lineare ad una funzione omogenea fra $n-1$ variabili, la quale proprietà per $n=3$ ed $n=4$ dà luogo ai due seguenti teoremi:

1.° Se l'Hessiano del primo membro dell'equazione $w=0$ di una linea piana fra coordinate tangenziali è identicamente nullo, quella equazione rappresenta una serie di punti situati in linea retta.

2.° Se l'Hessiano del primo membro dell'equazione $w=0$ di una superficie fra coordinate planari è nullo identicamente, quella equazione rappresenta una linea piana.

Mediante la teorica delle polari reciproche si ponno dedurre questi due teoremi da quelli della pag. 109 dovuti al Sig.r Hesse.





